Tutorium Mathematik I M WM

17.11.2006
Lösungen

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie ggf. den Grenzwert:

1. $a_n = \frac{1}{n+1}\left(5n + \frac{n^3+7n+1}{n^2}\right)$

   Lösung:

   Die Folge ist eine rationale Funktion in n:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(5n + \frac{n^3+7n+1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+1} + \frac{n^3+7n+1}{n^3+n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+\frac{1}{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{5}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} + \frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\
&= \frac{5}{1+0} + \frac{1+0+0}{1+0} = 5+1 = 6
\end{aligned}$$

   Hier wurden folgende Regeln verwendet: Wenn x_n nach x und y_n nach y konvergiert, dann konvergiert $x_n + y_n$ nach $x + y$ und $\frac{x_n}{y_n}$ konvergiert nach $\frac{x}{y}$ (sofern $y \neq 0$). Zudem konvergiert c/n^k für jede Konstante c und beliebigen Exponent $k > 0$ gegen 0.

2. $a_n = n\left(\sqrt{10} - \sqrt{10 + \frac{5}{n}}\right)$

   Lösung:

   Zuerst analysieren wir die einzelnen Terme: n geht gegen unendlich und $\sqrt{10} - \sqrt{10 + \frac{5}{n}}$ konvergiert gegen 0 da $\frac{5}{n}$ gegen 0 geht. Also haben wir ein Produkt aus zwei Termen, wobei einer gegen unendlich und der andere gegen 0 strebt. Aus dem Produktsatz für Grenzwerte können wir keine Schlüsse ziehen. Also formen wir wie folgt um (Standardumformung!):

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{10}-\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{10}-\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{10-(10+\frac{5}{n})}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} n\frac{-\frac{5}{n}}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-5}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\frac{5}{n}}\right)}\\
&= \frac{-5}{\left(\sqrt{10}+\sqrt{10+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}}\right)}\\
&= \frac{-5}{\sqrt{10}+\sqrt{10}} = \frac{-5}{2\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

Wir haben hier eine weitere Eigenschaft des Limes verwendet, nämlich $\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$!!!

3. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

<u>Lösung:</u>

Hier haben wir eine Differenz $a_n - b_n$, wobei a_n und b_n gegen Unendlich streben. Aus dem Summensatz für Grenzwerte können wir keine Aussage treffen. Und wieder verwenden wir eine Erweiterung wie beim vorigen Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

4. $a_n = \frac{n}{n+\sin(n)}$

<u>Lösung:</u>

Beachten Sie, dass $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also schätzen wir ab:

$$x_n := \frac{n}{n+1} \leq a_n \leq \frac{n}{n-1} =: y_n$$

Nun untersuchen wir die beiden Folgen x_n und y_n. Durch Dividieren der Zähler und Nenner durch n erhält man unmittelbar $\lim_{n\to\infty} x_n = 1 = \lim_{n\to\infty} y_n$. Der Einzwicksatz besagt: Konvergieren x_n und y_n gegen $a = 1$ und gilt $x_n \leq a_n \leq y_n$, dann konvergiert auch a_n gegen a. Also haben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

5. $a_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$

<u>Lösung:</u>

Beachten Sie, dass $\cos(n\pi)$ nur die Werte 1 und -1 annimmt. Wenn n gerade ist, also von der Form $n = 2k$, dann gilt $\cos(n\pi) = 1$ und wenn n ungerade ist, d.h. $n = 2k+1$, dann gilt $\cos(n\pi) = -1$. Also teilen wir die Folge in zwei Teilfolgen. Zuerst sehen wir uns nur die geraden Folgenglieder an:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{4k+1} = \frac{1}{2}$$

Und nun betrachten wir die ungerade Folgenglieder:

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k-1)(-1)}{4k-1} = -\frac{1}{2}$$

Nun gibt es den Satz der besagt, dass wenn a_n konvergent ist und gegen a konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge gegen a. Da unsere Folge zwei Teilfolgen hat, die gegen unterschiedlichen Grenzwerte konvergieren, folgt daraus, dass a_n nicht konvergent ist.

6. $a_n = \frac{7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2}{10}$, $a_1 = 2$

<u>Lösung:</u>

Es handelt sich um eine rekursiv definierte Folge. Die ersten Folgenglieder lauten

$$a_1 = 2, a_2 = 1.7, a_3 = 1.448, a_3 \approx 1.264$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass die Folge monoton fallend ist. Wir beweisen die Monotonie ($a_n \leq a_{n-1}$) durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang für $n = 2$: $a_2 = 1.7 \leq a_1 = 2$.

Induktionsannahme: $a_{n-1} \leq a_{n-2}$

Induktionsschluss: Wir wollen zeigen, dass $a_n \leq a_{n-1}$ gilt, d.h.

$$a_n = \frac{7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2}{10} \leq \frac{7+a_{n-2}+2a_{n-2}^2}{10} = a_{n-1}$$

$$7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2 \leq 7+a_{n-2}+2a_{n-2}^2$$

$$a_{n-1}+2a_{n-1}^2 \leq a_{n-2}+2a_{n-2}^2$$

Da $a_n \geq 0$ gilt (das sieht man aus der Bildungsvorschrift der rekurisven Folge, es werden stets nicht-negative Werte addiert), ist die letzte Zeile eine wahre Aussage und somit haben wir die Monotonie bewiesen.

Da a_n monoton fallend ist, ist $a_1 = 2$ eine obere Schranke. Zudem haben wir bereits überlegt, dass $a_n \geq 0$ gilt, also 0 eine untere Schranke ist.

Somit ist a_n monoton und beschränkt und somit konvergent. Bezeichne a den Grenzwert, d.h. sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Wir betrachten das Bildungsgesetz der Folge und bilden den Limes auf beiden Seiten. Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte erhält man folgende Gleichung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{7 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \lim_{n\to\infty} 2a_{n-1}^2}{10} \tag{1}$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = a$ gilt, erhält man aus (1) folgende Gleichung:

$$a = \frac{7 + a + 2a^2}{10} \Longleftrightarrow 10a = 7 + a + 2a^2 \Longleftrightarrow 2a^2 - 9a + 7 = 0$$

Um den Grenzwert a zu bestimmen, lösen wir diese quadratische Gleichung. Man erhält die Lösungen ${}_1a_2 = (9 \pm 5)/4$. Der Grenzwert a kann nicht gleich 3,5 sein, weil $a_1 = 2$ eine obere Schranke für a_n ist. Somit gilt $a = 1$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

7. $a_n = \frac{7+a_{n-1}+2a_{n-1}^2}{10}$, $a_1 = 4$

   <u>Lösung:</u>

   Diese rekursive Folge haben wir bereits im vorigen Punkt betrachtet. Allerdings starten wir hier mit einem anderen Wert. Wieder berechnen wir die ersten Folgenglieder:

   $$a_1 = 4, a_2 = 4.3, a_3 = 4.828, a_4 \approx 5.845$$

   Diesmal scheint die Folge monoton steigend zu sein. Der Beweis wird analog wie oben geführt. Auch hier können wir die Beobachtung nutzen, dass $a_n \geq 0$ ist. Allerdings führt die Induktionsannahme $a_{n-1} \geq a_{n-2}$ auf den Schluss, dass $a_n \geq a_{n-1}$ gilt, also a_n monoton steigend ist. Wäre a_n konvergent, so kämen nur die Werte 1 oder 3.5 als Grenzwert in Frage (Berechnung siehe oben). Da aber a_n monoton steigend ist und es ein Folgenglied (z.B. $a_2 = 4.3$) gibt, dass bereits über beiden potentiellen Grenzwerten liegt, ist a_n nicht konvergent. Formal gilt: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ (nämlich etwa $\varepsilon = 0.5$), sodass es für jedes n_0 ein $n \geq n_0$ gilt (hier ist es z.B. $n = n_0 + 2$), sodass $|a_n - a| > \varepsilon$ (für $a \in \{1, 3.5\}$). Diese Aussage gilt, weil $n = n_0 + 2 \geq 2$ ist und a_n monoton steigend ist, also $a_n \geq a_2 \geq a$. Und weiters haben wir $|a_n - a| \geq a_n - a \geq a_2 - a > 0.5 = \varepsilon$.