Tutorium Mathematik I M WM

3.11.2006
Lösungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

   (a) $ae^x - be^{-x} = 0 \qquad (a, b > 0)$,
   Lösung:

$$\begin{aligned} ae^x - be^{-x} &= 0 \\ ae^x &= be^{-x} \\ e^{2x} &= \frac{b}{a} \\ 2x &= \ln\left(\frac{b}{a}\right) \\ x &= \frac{1}{2}\left(\ln(b) - \ln(a)\right) \\ x &= \ln(\sqrt{b}) - \ln(\sqrt{a}) \end{aligned}$$

   (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln(x+1) = 1$,
   Lösung: Betrachten wir zunächst den Definitionsbereich: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 > 0, x+1 > 0\} = [1, \infty)$. Dann lösen wir auf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln(x+1) &= 1 \\ \ln(\sqrt{x^2-1}) - \ln(x+1) &= 1 \\ \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) &= 1 \\ \ln\left(\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{\sqrt{(x+1)^2}}\right) &= 1 \\ \ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) &= 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &= e \\ \frac{x-1}{x+1} &= e^2 \\ x(e^2-1) &= -1-e^2 \\ x &= \frac{1+e^2}{1-e^2} \end{aligned}$$

   Beachten Sie nun, dass $\frac{1+e^2}{1-e^2} < 0$ gilt, d.h. der einzige Wert für x, der die Gleichung lösen könnte, liegt nicht im Definitionsraum. Also gibt es keine Lösung der Gleichung.

(c) $\frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$,
<u>Lösung:</u> Der Definitionsbereich lautet $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) \neq \cos(x), \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann wird umgeformt:

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x)+1}{\sin(x)-\cos(x)} &= \frac{1}{\cos(x)} \\ \left(\frac{\sin(x)}{\cos x} + 1\right)\cos(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) &= \sin(x) - \cos(x) \\ 2\cos(x) &= 0 \\ \cos(x) &= 0 \end{aligned}$$

Die potentielle Lösungsmenge sieht wie folgt aus:

$$L = \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Beachten Sie aber, dass kein Wert aus der potentiellen Lösungsmenge in der Definitionsmenge liegt und daher keine Lösung der Gleichung existiert.

(d) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
<u>Lösung:</u>

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) &= 0 \\ \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(2x + x) &= 0 \\ \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) &= 0 \\ \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - \sin^2(x)) &= 0 \\ \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3\cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))) &= 0 \\ \sin(x)(2\cos(x) + 4\cos^2(x)) &= 0 \\ 2\sin(x)\cos(x)(1 + 2\cos(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Das Produkt ist Null genau dann wenn mindestens einer der Faktoren gleich Null ist. Daher ergibt sich die Lösungsmenge aus allen Lösungen von $\sin(x) = 0$ und $\cos(x) = 0$ und $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, also

$$L = \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{N}\right\}$$

2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraumes von $\mathbb{R}^4$. Stellen Sie $u = (1, -1, 1, 0)^T$ durch oben berechnete Orthonormalbasis dar.

<u>Lösung:</u>
Wir verwenden das Verfahren von Gram-Schmidt:
1. Vektor: normieren, d.h. $\|x_1\| = \sqrt{2}$ und somit

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Vektor: Stelle x_2 als Linearkombination von y_1 und einem (unbekannten) Vektor z_2 mit $\langle y_1, z_2 \rangle = 0$ dar:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \lambda_1 y_1 + z_2 \\
x_2 &= \langle x_2, y_1 \rangle y_1 + z_2 \\
z_2 &= x_2 - \langle x_2, y_1 \rangle y_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schließlich muss man z_2 noch normieren. Aus $\|z_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + 1}$, $y_2 = \frac{1}{\|z_2\|} z_2$ und anschließendem Vereinfachen erhalten wir

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Vektor: Nun stellen wir x_3 als Linearkombination von y_1, y_2 und (dem unbekannten) z_3 mit $\langle y_1, z_3\rangle = 0$ und $\langle y_2, z_3\rangle = 0$ dar:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + z_3 \\
x_3 &= \langle x_3, y_1\rangle y_1 + \langle x_3, y_2\rangle y_2 + z_3 \\
z_3 &= x_3 - \langle x_3, y_1\rangle y_1 - \langle x_3, y_2\rangle y_2 \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{10}}\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\rangle \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{10}} 2 \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Schließlich wird z_3 normiert und man erhält

$$
y_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}.
$$

Die Menge $\{y_1, y_2, y_3\}$ ist eine Orthonormalbasis des gegebenen Unterraums. Um den Vektor u darzustellen, verwenden wir die Fourier-Darstellung:

$$
\begin{aligned}
u &= \langle u, y_1\rangle y_1 + \langle u, y_2\rangle y_2 + \langle u, y_3\rangle y_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}\rangle y_2 + \frac{1}{\sqrt{15}}\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\\-2\end{pmatrix}\rangle y_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} 2 y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}(-2) y_2 + \frac{1}{\sqrt{15}}(-3) y_3 \\
&= \sqrt{2} y_1 - \sqrt{\frac{2}{5}} y_2 - \sqrt{\frac{3}{5}} y_3
\end{aligned}
$$