Tutorium Mathematik I M WM

20.10.2006
Lösungen

1. Bestimmen Sie die Ansätze für die Partialbruchzerlegung:

   (a) $\dfrac{x^3-4x+2}{(x-2)(x-4)}$

   (b) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x-2)(x+4)(x^2-3x+2)}$

   (c) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x+1)^2}$

   Lösungen:

   (a) $\dfrac{x^3-4x+2}{(x-2)(x-4)} = x+6+\dfrac{24x-46}{(x-2)(x-4)} = x+6+\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-4}$

   Der Grad des Nennerpolynoms ist kleiner als jener des Zählerpolynoms. In diesem Fall muss zunächst eine Polynomdivision durchgeführt werden.

   (b) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x-2)(x+4)(x^2-3x+2)} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{x+4}$

   Es gilt $(x^2-3x+2)=(x-2)(x-1)$. Daher lässt sich der Nenner als $(x-2)^2(x+4)(x-1)$ schreiben. Die zwei Linearfaktoren $(x-2)$ müssen zu $(x-2)^2$ zusammengefasst werden, bevor der Ansatz angeschrieben wird.

   (c) $\dfrac{x^3+3x^2-4}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}+\dfrac{E}{x+1}+\dfrac{F}{(x+1)^2}+\dfrac{G}{(x+1)^3}+\dfrac{H}{(x+1)^4}$

   x^2+2x+2 kann nicht in reelle Linearfaktoren zerlegt werden. Der zweite Faktor x^2+2x+1 kann als $(x+1)^2$ geschrieben werden. Insgesamt ergibt sich der Nenner dann zu $(x^2+2x+2)^2(x+1)^4$.

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung für:

$$f(x) := \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4}$$

   Lösung:
   Zunächst muss das Nennerpolynom faktorisiert werden. Zu diesem Zweck gilt es eine Nullstelle von x^3-5x^2+8x-4 zu ermitteln. Mittels des Satzes von Vieta ergibt sich, dass als Kandidaten für ganzzahlige Nullstellen nur die Teiler von -4, also ±1, ±2 sowie ±4 in Frage kommen. Einsetzen von $x=1$ ergibt, dass hiermit eine Nullstelle gefunden ist (oder auch: Nullstellensuche mit dem Taschenrechner).

Die restlichen Nullstellen können nun durch Polynomdivision bestimmt werden. Man erhält auf diesem Weg $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$. Durch Faktorisierung des quadratischen Polynoms $(x^2 - 4x + 4)$ (bzw. durch Lösen einer quadratischen Gleichung) ergibt sich die gesuchte vollständige Faktorisierung des Nennerpolynoms. Man erhält: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$.

Somit ergibt sich der folgende Ansatz für die gesuchte Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$:

$$\frac{x-5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}.$$

Um die Koeffizienten A, B und C zu bestimmen, bringt man zunächst den Ausdruck auf gleichen Nenner und multipliziert dann mit dem Nenner. Man erhält dann:

$$x - 5 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-1).$$

A, B und C können nun entweder durch Koeffizientenvergleich, die Einsetzmethode oder eine Mischung dieser beiden Methoden bestimmt werden.

Im folgenden wird die Einsetzmethode verwendet. Es bietet sich an, die Werte $x = 1$ und $x = 2$ (Nullstellen der Faktoren) einzusetzen. Als dritten Wert (es sind 3 Koeffizienten zu bestimmen!) wählen wir einen beliebigen anderen Wert, für den sich die obenstehenden Ausdrücke halbwegs einfach ausrechnen lassen, z.B. $x = 0$. Man erhält nun:

- Einsetzen von $x = 1$ liefert $-4 = A$, also $A = -4$.
- Einsetzen von $x = 2$ liefert $-3 = C$, also $C = -3$.
- Einsetzen von $x = 0$ liefert $-5 = 4A + 2B - C$, somit erhält man $B = 4$.

Die gesuchte Partialbruchzerlegung hat daher folgende Gestalt:

$$\frac{x-5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{-4}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

3. Interpolieren Sie die Punkte

$$(x, y) = \{(-1, -9), (1, -1), (2, -3), (3, -9)\}$$

mit einem Polynom möglichst niedrigen Grades.

Lösung:

Das Newton-Verfahren der dividierten Differenzen ergibt folgendes Schema:

$$\begin{array}{rr|llll}
-1 & -9 & & & \\
 & & \frac{-1-(-9)}{1-(-1)} = 4 & & \\
1 & -1 & & \frac{-2-4}{2-(-1)} = -2 & \\
 & & \frac{-3-(-1)}{2-1} = -2 & & \frac{-2-(-2)}{3-(-1)} = 0 \\
2 & -3 & & \frac{-6-(-2)}{3-1} = -2 & \\
 & & \frac{-9-(-3)}{3-2} = -6 & & \\
3 & -9 & & &
\end{array}$$

Somit lautet das Interpolationspolynom: $p(x) = -9 + 4(x+1) - 2(x+1)(x-1) + 0(x+1)(x-1)(x-2)$.