Tutorium Mathematik I M WM

13.10.2006
Lösungen

Betrachten Sie folgende Funktionen mit Argument- und Bildbereich gleich $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 2x - 5 \qquad\qquad g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

1. Bestimmen Sie den maximalen **Definitionsbereich** und das **Bild** der Funktionen.
2. Sind die Funktionen **monoton**? Wenn ja, auf welchen Bereichen?
3. Sind die Funktionen **injektiv**, **surjektiv**?
4. Bestimmen Sie die **Umkehrabbildung** (falls möglich) mit geeignetem Bildbereich.
5. Sind die Funktionen **beschränkt**?

ad $f(x) = 2x - 5$:

1. Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ (alle Argumente in $\mathbb{R}$ sind zugelassen)
   Bild $B = \mathbb{R}$ (jede reelle Zahl kommt als Bild vor).
2. Da f eine affin-lineare Funktion mit positiver Steigung ist, liegt die Vermutung nahe, dass f streng monoton steigend ist. Formal weisen wir das wie folgt nach: Sei $x_1 < x_2$ (mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$) dann folgt

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ 2x_1 &< 2x_2 \\ f(x_1) = 2x_1 - 5 &< 2x_2 - 5 = f(x_2) \end{aligned}$$

3. Die Funktion is injektiv da f streng monoton steigend ist.
   Surjektivität folgt daraus, dass der Bildbereich mit dem Bild übereinstimmt, d.h. für jedes $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in D$ mit $f(x) = y$.
4. Da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, gibt es eine Umkehrabbildung. Um die Umkehrabbildung zu bestimmen, formen wir die Funktion um:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 5 \\ y + 5 &= 2x \\ \frac{y+5}{2} &= x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

5. Offensichtlich ist die Funktion nicht beschränkt, da $B = \mathbb{R}$ gilt und die Menge $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

ad $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$:

1. Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, da der Wert im Nenner nicht Null werden darf.
   Bild: $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: Dies überlegt man sich, indem man versucht, zu dem potentiellen Bildpunkt $y \in \mathbb{R}$ das zugehörige Argument $x \in D$ mit $g(x) = y$ zu finden. Legt man $y \in \mathbb{R}$ fest, dann müsste $x = \frac{y-1}{y+1}$ sein, damit $g(x) = y$ gilt. Offenbar gibt es aber ein derartiges x nicht, wenn $y = -1$ ist. Also hat das Bild die Form $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Monotonie: Wir wählen zwei Argumente $x_1 < x_2 < 1$ aus dem Definitionsbereich. Wir nehmen an, dass $g(x_1) < g(x_2)$ gilt. Also zeigen wir, dass $g(x_1) \geq g(x_2)$ nicht stimmen kann:

$$\begin{aligned} g(x_1) = \frac{1+x_1}{1-x_1} &\geq \frac{1+x_2}{1-x_2} = g(x_2) \\ 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2 &\geq 1 + x_2 - x_1 - x_1x_2 \\ x_1 &\geq x_2 \end{aligned}$$

   D.h., wenn $g(x_1) \geq g(x_2)$ gelten soll, dann müsste $x_1 \geq x_2$ sein. Da aber $x_1 < x_2$ gilt, folgt daraus, dass $g(x_1) \geq g(x_2)$ nicht stimmen kann und somit $g(x_1) < g(x_2)$ für alle $x_1 < x_2 < 1$ hält. Also ist g streng monoton steigend im Intervall $(-\infty, 1)$. Analog zeigt man, dass g auch streng monoton steigend im Intervall $(1, \infty)$ ist.

3. Zuerst beobachten wir, dass g streng monoton steigend auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ ist. Also ist g eingeschränkt auf $(-\infty, 1)$ injektiv und somit haben wir für alle $x_1 < x_2 < 1$ die Folgerung $g(x_1) < g(x_2)$. Analog gilt für alle $1 < x_1 < x_2$ die Folgerung $g(x_1) < g(x_2)$. Es bleibt zu zeigen, dass für zwei Werte $x_1 < 1 < x_2$ folgt $g(x_1) \neq g(x_2)$. Wir beobachten, dass

$$g(x) > -1 \qquad \text{da } 1 + x > -1 + x$$

   für alle $x \in (-\infty, 1)$ und

$$g(x) < -1 \qquad \frac{1+x}{1-x} < -1 \iff 1 + x > -1 + x$$

   für alle $x \in (1, \infty)$ gilt (Achtung: hier gilt $1 - x < 0$, deshalb Vorzeichenwechsel).

   Also folgt $g(x_1) > -1 > g(x_2)$ und somit insbesonders $g(x_1) \neq g(x_2)$.

   Fasst man die Beobachtungen zusammen, so folgert man, dass für jedes Paar $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ folgt $g(x_1) \neq g(x_2)$. Somit ist g injektiv.
   Wir haben bereits festgestellt, dass $B \neq \mathbb{R}$ (wir mussten -1 exkludieren). Also ist g nicht surjektiv.

4. Da g injektiv ist, kann man g zu einer bijektiven Funktion machen, indem man den Bildbereich auf B einschränkt. Die zugehörige Umkehrabbildung haben wir bereits in Punkt 1 bestimmt. Sie lautet

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}$$

5. Wir wissen bereits dass $B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Das ist eine unbeschränkte Menge, also ist g unbeschränkt.