Tutorium Mathematik I M WM

2.2.2007
Lösungen

Betrachten Sie die Zykloide, die durch folgende Parameterdarstellung gegeben ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$$

1. Bestimmen Sie die Bogenlänge für $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Lösung:

   Die Bogenlänge ist durch folgende Formel gegeben

   $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} dt.$$

   Daher muss zuerst der Tangentenvektor bestimmt werden:

   $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

   Zuerst vereinfachen wir den Wurzelausdruck:

   $$\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2(1 - \cos t)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|$$

   Damit ergibt sich für die Bogenlänge zwischen 0 und t

   $$s(t) = \int_0^t 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

   Speziell für $0 \leq t \leq 2\pi$ erhalten wir demnach

   $$L = s(2\pi) = 4 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8 \cos \frac{t}{2} |_0^{\pi} = -8(0 - 1) = 8.$$

2. Bestimmen Sie den Tangenten- und den Hauptnormalenvektor.

   Lösung:

   Der Tangentenvektor $\vec{v}_1$ wurde bereits bestimmt. Dann hat der Hauptnormalenvektor die Form

   $$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie die Kümmung in Abhängigkeit von t.

   Lösung:

   Ist eine Kurve durch einen beliebigen Parameter t gegeben, dann lässt sich die Krümmung wie folgt bestimmen:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)|}{\left(\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)\right)^{3/2}}$$

   Also bestimmen wir die zweiten Ableitungen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

   Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\left|(1-\cos t)\cos t - \sin^2 t\right|}{\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right)^{3/2}} \\ &= \frac{\left|\cos t - (\cos^2 t + \sin^2 t)\right|}{(2(1-\cos t))^{3/2}} \\ &= \frac{|\cos t - 1|}{\sqrt{8}(1-\cos t)^{3/2}} \\ &= \frac{1-\cos t}{\sqrt{8}(1-\cos t)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{1-\cos t}} \end{aligned}$$

   Beachten Sie dabei, dass $\cos t \leq 1$ gilt und daher $|\cos t - 1| = 1 - \cos t$.

4. Berechnen Sie den Radius und Mittelpunkt des Krümmungskreises für $t = \pi$.

   Lösung:

   Der Radius des Krümmungskreises ist durch $r = \frac{1}{\kappa}$ gegeben. Für $t = \pi$ erhalten wir

$$\kappa(\pi) = \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{1-\cos\pi}} = \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

   Also hat der Krümmungskreis in $t = \pi$ den Radius $r = 4$.

   Für den Mittelpunkt (ξ, η) verwenden wir folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x_1(t) - \frac{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}{\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}\dot{x}_2(t) \\ \eta(t) &= x_2(t) + \frac{\dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_1^2(t)}{\dot{x}_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)}\dot{x}_1(t) \end{aligned}$$

   Da wir den Krümmungsmittelpunkt für $t = \pi$ benötigen, werten wir die benötigten Funktionen an $t = \pi$ aus:

$$\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In obige Formeln eingesetzt erhalten wir

$$\xi(\pi) = \pi - \frac{4+0}{-2-0} 0 = \pi \qquad \text{und} \qquad \eta(\pi) = 2 + \frac{4+0}{-2-0} 2 = -2.$$