

Tutorium Mathematik I M WM

26.1.2007

Lösungen

1. Gegeben sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ mit

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{falls } (2k-1)\pi < t < 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{falls } 2k\pi < t < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Graph von f .
(b) Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe.

Lösung:

Die Funktion f ist 2π -periodisch, d.h. $T = 2\pi$. Ziel der Fourierentwicklung ist die Darstellung von f durch eine Reihe der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Zuerst beobachten wir, dass $f(x) = -f(-x)$ gilt also f eine ungerade Funktion ist. Daraus kann man folgern, dass $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es müssen also nur mehr die Koeffizienten b_n berechnet werden. Diese haben die Gestalt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Beachten Sie, dass f auf $(-\pi, 0)$ und $(0, \pi)$ unterschiedlich definiert ist. Daher muss das Integral in zwei Teile wie folgt aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (1) \sin(nx) dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\cos(nx)}{n} \right|_{-\pi}^0 - \left. \frac{\cos(nx)}{n} \right|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$y = 2 \cosh \frac{x}{2}$$

von $x = 0$ bis $x = 2$. Bestimmen Sie weiters den Tangenten- und Normalvektor.

Lösung:

Gegeben ist die Kurve mit $y = 2 \cosh \frac{x}{2}$. Für die Bogenlänge L der Kurve $y = y(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ gilt die Formel

$$L = \int_{x=a}^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

In diesem Beispiel ergibt sich

$$L = \int_{x=0}^2 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{x=0}^2 \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{2}} dx = \int_{x=0}^2 \left| \cosh \frac{x}{2} \right| dx = \int_{x=0}^2 \cosh \frac{x}{2} dx = 2 \sinh \frac{x}{2} \Big|_{x=0}^2.$$

Es ergibt sich somit $L = 2 \sinh 1$.

Für eine Kurve der Form $y = y(x)$ gilt

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}.$$

Im konkreten Beispiel hat der Tangentenvektor die Form

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh \frac{x}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Normalvektor auf $\vec{t}$ wird daher durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sinh \frac{x}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

gebildet.

Alternativ kann man die Kurve auch durch die Bogenlänge parametrisieren, d.h. die Bogenlänge der Kurve von 0 bis x wird als Parameter s eingeführt. Man erhält die Beziehung $s = 2 \sinh \frac{x}{2}$. Nun rechnet man

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \cosh \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

in

$$\begin{pmatrix} 2 \operatorname{arsinh} \frac{s}{2} \\ \sqrt{s^2 + 4} \end{pmatrix}$$

um. Die neue Darstellung der Kurve ist durch die Bogenlänge parametrisiert. Dann erhält man durch Ableiten beider Koordinaten für den Tangentenvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{s^2 + 4}} \end{pmatrix}$$

und durch weiteres Ableiten (und Normieren) den Normalvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2s}{(s^2 + 4)^{3/2}} \\ \frac{4}{(s^2 + 4)^{3/2}} \end{pmatrix}$$