

Tutorium Mathematik I M WM

19.1.2007

Lösungen

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

b) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

c) $\int (\cos x - \cos^3 x) dx$

Lösung:

- a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$: Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$-x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 = 4 \left(1 - \frac{(x+1)^2}{4} \right).$$

Da dies ja der Term unter der Wurzel ist, liegt die Substitution $\sin u := \frac{x+1}{2}$ nahe, denn auf diese Weise erhält man mit $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ und $dx = 2 \cos u du$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &= \int \frac{2 \cos u}{2 \sqrt{1-\sin^2 u}} du = \int \frac{2 \cos u}{2 \cos u} du = \int du = u + C \\ &= \arcsin \left(\frac{x+1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

- b) $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

Substituieren wir $u = \tan \frac{x}{2}$, so folgt $\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2}$ sowie $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ (siehe VO-Skriptum!) und weiters

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{2}{1+u^2+2u} du \\ &= \int \frac{2}{(1+u)^2} du = -\frac{2}{u+1} + C = -\frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + K. \end{aligned}$$

- c) $\int (\cos x - \cos^3 x) dx$

Es gilt $\int (\cos x - \cos^3 x) dx = \int \cos x (1 - \cos^2 x) dx = \int \cos x \sin^2 x dx$. Nun substituiert man bequem $u := \sin x$, denn

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

und wir erhalten

$$\int (\cos x - \cos^3 x) dx = \int \cos x \cdot u^2 \frac{du}{\cos x} = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$