Tutorium Mathematik I M WM

12.1.2007
Lösungen

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{a)} \qquad \int x \ln x dx$$

$$\text{b)} \qquad \int (\ln x)^2 dx$$

$$\text{c)} \qquad \int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} dx$$

$$\text{d)} \qquad \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4} dx$$

<u>Lösung:</u>

- a) $\int x \ln x dx$:

  Wir verwenden partielle Integration mit $f'(x) = x$ und $g(x) = \ln x$. Dann gilt $f(x) = \frac{x^2}{2}$ und $g'(x) = \frac{1}{x}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

- b) $\int (\ln x)^2 dx$

  Wir verwenden wieder die Methode der partiellen Integration. Hier wird allerdings die Funktion $f'(x)$ künstlich eingeführt:

$$f'(x) := 1, \qquad g(x) := (\ln x)^2,$$

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = 2\frac{\ln x}{x}.$$

  Dies führt auf

$$\begin{aligned}\int 1(\ln x)^2 \, dx &= x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\frac{\ln x}{x} dx + C = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, dx + C \\ &= x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1) + C = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.\end{aligned}$$

- c) $\int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} dx$

  Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, also können wir direkt die Methode der Partialbruchzerlegung anwenden. Es ergibt sich dabei (Methode siehe VO-Skriptum!)

$$\frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{-4}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

  Es gilt also

$$I := \int \frac{x-5}{x^3-5x^2+8x-4} = -4 \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

  und weiter

$$I = -4 \ln|x-1| + 4 \ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + C.$$

- d) $\int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4} dx$

  Da hier der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, führen wir zunächst eine Polynomdivision aus und erhalten

$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+4} = (x-1) + \frac{-x+4}{x^2+x+4}.$$

  Daher ergibt sich

$$I := \int \frac{x^3+2x}{x^2+x+4} dx = \int (x-1) dx + \underbrace{\int \frac{-x+4}{x^2+x+4} dx}_{:=I_1} = \frac{x^2}{2} - x + I_1.$$

  Das Polynom x^2+x+4 besitzt keine rellen Nullstellen, also ist der Integrand von I_1 nicht weiter zerlegbar. Zur Berechnung von I_1 teilt man es daher in zwei Integrale derart, dass im Zähler des ersten Integranden die Ableitung des Nennerpolynoms steht. Es ergibt sich

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx + \frac{9}{2} \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+4}}_{:=I_2} = -\frac{1}{2} \ln(x^2+x+4) + \frac{9}{2} I_2.$$

  I_2 wiederum kann nun berechnet werden, indem man den Nenner quadratisch ergänzt zu

$$x^2+x+4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = \frac{15}{4}\left(\frac{4}{15}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{15}{4}(y^2+1)$$

  mit $y := \frac{2}{\sqrt{15}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Mit $dx = \frac{\sqrt{15}}{2} dy$ gilt

$$I_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{4}{15} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan y + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$

  Insgesamt ergibt sich somit

$$I = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+4) + \frac{9}{\sqrt{15}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C.$$