Tutorium Mathematik I M WM

06.10.2006
Lösungen

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) gilt:

   (a) $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$

   (b) $\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$.

   ad a) Aus der Angabe ergibt sich

   $$1 + |x - 1| > |x - 2|.$$

   Fallunterscheidung:

   (i) $\underline{x > 2:}$ $1 + x - 1 > x - 2$ bzw. $0 > -2$, also ist $L_1 = \{x \in \mathbb{R}\,|x > 2\}$.

   (ii) $\underline{1 \leq x < 2:}$ $1 + x - 1 > -x + 2$ bzw. $x > 1$, also ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,|1 < x < 2\}$.

   (iii) $\underline{x < 1:}$ $1 - x + 1 > -x + 2$ bzw. $2 > 2$, also ist $L_3 = \{\}$.

   Die Lösungsmenge ist somit $L = L_1 \cup L_2$.

   ad b) Fallunterscheidung:

   (i) $\underline{|x| > 1:}$ $2|x| - 2 \geq x^2 - 1$ bzw. $(|x| - 1)^2 \leq 0$, also ist $L_1 = \{\}$.

   (ii) $\underline{|x| < 1:}$ $2|x| - 2 \leq x^2 - 1$ bzw. $(|x| - 1)^2 \geq 0$, also ist $L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,| - 1 < x < 1\}$.

   Die Lösungsmenge ist somit $L = L_2 = \{x \in \mathbb{R}\,| - 1 < x < 1\}$.

2. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der Funktion

   $$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}$$

   Vereinfachen Sie $f(x)$ und skizzieren Sie den Graphen. Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

   Maximaler Definitionsbereich in $\mathbb{R}$: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

   Begründung: Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- $x-3 \neq 0$ wegen Division durch $x-3$: $x \neq 3$.
- $x+3 \neq 0$ wegen Division durch $x+3$: $x \neq -3$.
- $\frac{x+3}{x-3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Das impliziert a) $x+3 \geq 0$ und $x-3>0$, oder b) $x+3 \leq 0$ und $x-3<0$.
  In a) $x \geq -3$ und $x>3 \quad \Longrightarrow \quad x>3$.
  In b) $x \leq -3$ und $x<3 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -3$.
  Zusammengefasst: $x>3$ oder $x \leq -3$
- $\frac{x-3}{x+3} \geq 0$ als Ausdruck in der Quadratwurzel.
  Analoge Rechnung wie im obigen Punkt ergibt $x \geq 3$ oder $x<-3$.
  (Oder man beobachtet, dass $\frac{x+3}{x-3}>0$ nur dann wenn $\frac{x-3}{x+3}>0$.)
- $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \neq 0$ da durch diesen Ausdruck dividiert wird.

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \neq \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \Longrightarrow \frac{x+3}{x-3} \neq \frac{x-3}{x+3} \Longrightarrow (x+3)^2 \neq (x-3)^2 \Longrightarrow 6x \neq -6x \Longrightarrow x \neq 0$$

Die Zusammenfassung aller Bedingungen ergibt $(-\infty,-3) \cup (3, \infty)$ als Definitionsbereich.

Vereinfachung: $f(x)=\frac{x}{3}$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}}{\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}} \quad = \quad \frac{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}\right)}=\frac{\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}+2}{\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}}=$$

$$\frac{\frac{(x+3)^2+(x-3)^2+2(x^2-9)}{x^2-9}}{\frac{(x+3)^2-(x-3)^2}{x^2-9}} \quad = \quad \frac{2x^2+18+2x^2-18}{12x}=\frac{4x^2}{12x}=\frac{x}{3}.$$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität:

Wählt man zwei Elemente x_1 und x_2 aus dem Definitionsbereich von f mit $x_1 \neq x_2$ so folgt $f(x_1)=\frac{x_1}{3} \neq \frac{x_2}{3}=f(x_2)$. Daher ist f injektiv.
Es gibt ein Element $y \in \mathbb{R}$, sodass es kein $x \in D$ mit $f(x)=y$ gibt, d.h. nicht jedes Element in $\mathbb{R}$ wird als Bild von f getroffen. In unserem Fall erfüllt $y=1$ diese Bedingung (denn dann müsste $x=3$ sein aber 3 liegt nicht im Definitionsbereich). Also ist f nicht surjektiv.
Da f nicht surjektiv ist, kann f auch nicht bijektiv sein.