1. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Welche der folgenden Aussagen gelten für beliebige Elemente $x, y, a, b \in G$?

   (a) $axb = ayb$ impliziert $x = y$

   (b) $x^{-1} = y^{-1}$ impliziert $x = y$

   (c) $xa = ay$ impliziert $x = y$

   (d) $ax = e$ impliziert $x^{-1} = a$

   (e) $ax = e$ impliziert $xa = e$

   (f) $abx = e$ impliziert $x = a^{-1}b^{-1}$

2. Zeigen Sie: Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist genau dann eine kommutative Gruppe, wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$.

3. Finden Sie ein Beispiel einer Halbgruppe mit linksneutralem Element, in der jedes Element ein Rechtsinverses hat, welche keine Gruppe ist.

4. Sei G Gruppe, H, $K \leq G$. $H \cup K$ ist Gruppe genau dann, wenn $H \subseteq K$ oder $K \subseteq H$.

5. Eine endliche Teilmenge $H \neq \emptyset$ einer Gruppe G ist schon eine Untergruppe, wenn nur $a,\ b \in H \Rightarrow ab \in H$. Für unendliche Teilmengen stimmt das nicht (Beispiel).

6. Finden Sie eine unendliche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat.

7. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, a, b, $c \in G$, e das neutrale Element von G. Dann gilt

   (a) $a = e \iff |a| = 1$

   (b) $|a^{-1}| = |a|$, $|cac^{-1}| = |a|$ und $|ab| = |ba|$

   (c) Finden Sie ein Beispiel von Gruppenelementen endlicher Ordnung, deren Produkt unendliche Ordnung hat. (Hinweis: $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$).

8. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und $a \in G$.

   Wenn $|a|$ endlich und $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt $|a^k| = \dfrac{|a|}{\mathrm{ggT}(|a|,\ k)}$.

9. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und $a,\ b \in G$ mit $|a|$, $|b|$ endlich.
   Was kann man über $|ab|$ aussagen (z.B. obere/untere Schranke), wenn $ab = ba$?

10. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G, dann gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$, sodass die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ genau die Nebenklassen von N in G sind, und $a \sim b$ genau wenn $a^{-1}b \in N$.

11. Seien f und g Gruppenhomomorphismen, $f,\ g\colon G \to H$ und $A \subseteq G$. Dann gilt

    (a) $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$

    (b) Wenn $\forall\, a \in A\ \ f(a) = g(a)$, dann $\forall\, b \in \langle A \rangle\ \ f(b) = g(b)$.

    ($\langle X \rangle$ bezeichnet die von einer Teilmenge X in einer Gruppe erzeugte Untergruppe.)

12. Seien G und H Gruppen und $f : G \to H$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie, dass

    (a) ist G abelsch, dann auch H.

    (b) ist G zyklisch, dann auch H.

    (die Umkehrungen sind falsch! Beispiel?)

13. Sei p eine Primzahl und a eine ganze Zahl, die nicht durch p teilbar ist. Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von Fermat, dass $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ gilt („Kleiner Satz von Fermat“).
Hinweis. Benutzen Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$! (Warum ist das eine Gruppe?).

14. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt
   (a) Wenn $K \leq G$, dann $f(K) \leq H$,
   (b) Wenn $K \trianglelefteq G$, dann $f(K) \trianglelefteq \operatorname{Im} f$. Geben Sie ein Beispiel an, dass dann nicht $f(K) \trianglelefteq H$ gelten muss.
   (c) $\operatorname{Im} f \leq H$,
   (d) Für alle $a \in G$ gilt $f\left(a^{-1}\right) = (f(a))^{-1}$.
   (e) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker}(f) = \{e_G\}$.

15. Seien G, H, K Gruppen, $f : G \to H$ und $g : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie:
   (a) Die Abbildung $g \circ f$ ist ein Gruppenhomomorphismus von G nach K,
   (b) falls f bijektiv ist, so ist auch f^{-1} ein Gruppenhomomorphismus,
   (c) $(\operatorname{End}(G), \circ)$ ist ein Monoid,
   (d) $(\operatorname{Aut}(G), \circ)$ ist eine Gruppe. Geben Sie das neutrale Element sowie das zu $f : G \to G$ in dieser Gruppe inverse Element an.

16. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

17. Zeigen Sie, dass die Kleinsche Vierergruppe $V_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$ eine Gruppe ist und geben Sie die Verknüpfungstafel an. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen V_4 und $C_2 \times C_2 = \{(a, b) \mid a, b \in C_2\}$ mit komponentenweiser Verknüpfung an.

18. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : ad - bc = 1\}$ eine Gruppe ist, die auf $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ vermittels
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az + b}{cz + d}$$
wirkt. Ist die Wirkung transitiv?

19. Seien G_j, $j \in J$, abelsche Gruppen, H eine abelsche Gruppe, für $j \in J$ die Abbildung $f_j : G_j \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es einen Gruppenhomomorphismus $f : \sum_{j\in J} G_j \to H$ gibt, sodass für alle $k \in J$ die Relation $f \circ \varepsilon_k = f_k$ gilt, wobei $\varepsilon_k : G_k \to \sum_{j\in J} G_j$ die kanonische Einbettung bezeichnet.

20. Seien m und n zwei teilerfremde positive ganze Zahlen. Finden Sie eine Darstellung von $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ als innere direkte Summe, und zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist.

21. $\mathbb{Z}_n$ bezeichne die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
   (a) $f \colon \mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_5,\ \ f(x + 25\mathbb{Z}) = x + 5\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Epimorphismus, der keine Rechtsinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.
   (b) $g \colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_{25},\ \ g(x + 5\mathbb{Z}) = 5x + 25\mathbb{Z}$ ist ein Gruppen-Monomorphismus, der keine Linksinverse, die Gruppen-Homomorphismus ist, hat.

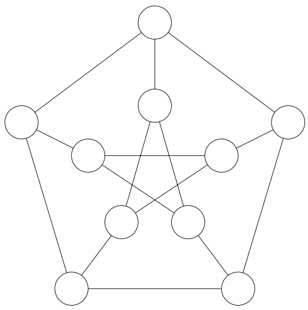
22. Zeigen Sie: Die sechs Lösungen der Gleichung $x^6 = 1$ über $\mathbb{C}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung bilden eine Gruppe. Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf! Beweisen oder widerlegen Sie: Diese Gruppe ist isomorph zu S_3.

23. Finden Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen $(G, \circ)$ mit 3, 5, und 7 Elementen. Zeigen Sie, daß es (bis auf Isomorphie) nur zwei Gruppen $(G, \circ)$ der Ordnung 4 gibt. Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 6 entweder eine zyklisch Gruppe oder zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist.

24. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
    (a) G ist ein Baum.
    (d) G ist maximal azyklisch, d.h., jeder Graph H mit $V(H) = V(G)$ und $E(G) \subsetneq E(H)$ enthält einen Kreis.

25. Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann existiert stets ein Knoten $v \in V$, sodass $G - v$ ebenfalls zusammenhängend ist. ($G - v$ ist jener Graph der aus G entsteht, indem man v und alle zu v inzidenten Kanten entfernt.)

26. Der folgende Graph heisst Peterson-Graph. Ist der Peterson-Graph planar?



27. Beweisen Sie: Jeder zusammenhängende Graph $G = (V, E)$ kann durch das Hinzufügen von höchstens $\lfloor |V|/2 \rfloor$ Kanten in einen Euler'schen Multigraphen (d.h. Parallelkanten sind erlaubt) transformiert werden. (Ein Multigraph heißt Eulersch, wenn er einen Eulerschen Kreis enthält.)

28. Josef, Manfred, Rudolf, Stefan, Theo und Willi telefonieren täglich miteinander und erzählen einander den neuesten Tratsch. Josef spricht jeden Tag mit Manfred und Willy; Manfred spricht mit Josef und Rudolf; Rudolf spricht mit Manfred und Theo; Stefan spricht mit Manfed, Rudolf, Theo und Willi. Theo spricht mit Rudolf, Stefan und Willi. Willi spricht mit Josef, Stefan und Theo. Alle Gerüchte, die jemand an einem Tag erfährt, erzählt er am Tag darauf weiter.
    (a) Modellieren Sie diese Gerüchtebörse als Graph.
    (b) Wieviele Tage dauert es, bis daß ein Gerücht von Josef zu Stefan kommt? Wer wird es Stefan erzählen?
    (c) Wieviele Tage dauert es höchstens, bis daß sich ein Gerücht vollständig verbreitet hat?
    (d) Untersuchen Sie, wie sich die maximale Ausbreitungsdauer verändern kann, wenn zwei der Teilnehmer sich zerstreiten und nicht mehr miteinander telefonieren.

29. Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, in dem jeder Knoten mindestens eine ausgehende Kante hat. Zeigen Sie: G enthält einen gerichteten Kreis.

30. Zeigen Sie: In einem zusammenhängenden Graphen haben zwei längste Wege mindestens einen Knoten gemeinsam.

31. Zeigen Sie: Ein bipartiter Graph mit einer ungeraden Anzahl von Knoten kann keinen Hamilton'schen Kreis besitzen.

32. Es sei $\mathcal{I} = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ die Menge aller nicht-trivialen Intervalle über $\mathbb{R}$. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein *Intervallgraph* wenn es eine Abbildung $f : V \to \mathcal{I}$ gibt mit folgender Eigenschaft: $[v_1, v_2] \in E$ dann und nur dann wenn $f(v_1) \cap f(v_2) \neq \emptyset$.

    Welche der drei Graphen in Abbildung 1 sind Intervallgraphen?

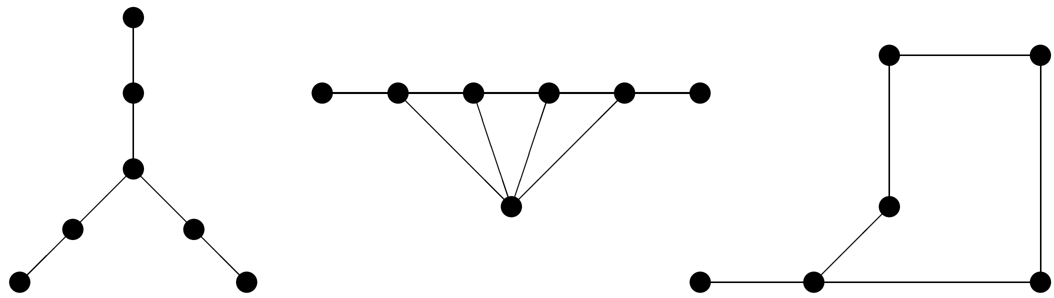


Abbildung 1: Intervallgraphen oder keine Intervallgraphen? (Aufgabe 32)

33. (Ein Kriminalrätsel). An dem Tag, an dem das wertvolle Buch gestohlen wurde, haben nur sechs Professoren die Bibliothek betreten. Jeder von ihnen hat die Bibliothek nur einmal besucht und einige Zeit darin verbracht. Wenn zwei von ihnen gleichzeitig in der Bibliothek waren, dann hat immer mindestens einer von ihnen den anderen bemerkt. Inspektor Brown befragte die Professoren Alfred, Berthold, Charlotta, Daniel, Eduard und Ida und sammelte die folgenden Informationen von ihnen:

    - Professor Alfred sagte, daß er Berthold und Eduard in der Bibliothek gesehen hat.
    - Berthold behauptete, daß er Alfred und Ida gesehen hat.
    - Charlotta sah angeblich Daniel und Ida.
    - Daniel gab an, Alfred und Ida gesehen zu haben.
    - Eduard bezeugte, daß er Berthold und Charlotta getroffen hat.
    - Ida sagte, daß sie Charlotta und Eduard gesehen hat.

    Einer der Professoren hat gelogen!! Wer war es?

34. Folgern Sie aus dem Satz von Dilworth: Jede geordnete Menge mit n^2+1 Elementen enthält eine Kette oder eine Antikette mit mindestens $n+1$ Elementen.

35. Leiten Sie aus Aufgabe 34 den Satz von Erdös-Szekeres her: "In einer Folge von n^2+1 paarweise verschiedenen Zahlen gibt es immer eine steigende oder fallende Teilfolge der Länge $n+1$."

    Hinweis: Es sei $a_1, \ldots, a_{n^2+1}$ die betrachtete Zahlenfolge. Untersuchen Sie die Ordnung auf den Paaren (a_i, i), die durch $(a_i, i) \le (a_j, j)$ gdw. $a_i \le a_j$ und $i \le j$ festgelegt ist.

36. Es sei $\mathcal{R}$ eine Menge von 13 achsenparallelen Rechtecken, deren linke untere Ecke der Ursprung und deren rechte obere Ecke ein beliebiger ganzzahliger Punkt im ersten Quadranten ist. Zeigen Sie: Es gibt fünf Rechtecke R_1, R_2, R_3, R_4 in $\mathcal{R}$, sodaß für $1 \le i \le 3$ jeweils das Rechteck R_i das Rechteck R_{i+1} enthält, oder es gibt vier Rechtecke R_1, R_2, R_3 in $\mathcal{R}$, sodaß für $1 \le i \ne j \le 3$ jeweils das Rechteck R_i das Rechteck R_j *nicht* enthält.

37. Ein Palindrom ist ein Wort, das von vorne und von hinten gelesen den selben Ausdruck ergibt; z.B. RENNER, RELIEFPFEILER, AXXUXXA, etc. Wieviele 9-buchstabige Palindrome gibt es über dem lateinischen Alphabet?

38. In einem Institut mit 6 Professorinnen, 8 Professoren, 7 Assistenten und 12 Assistentinnen soll eine 8-köpfige Gleichbehandlungskommission gebildet werden, der je 4 Frauen und Männer, sowie 5 Professoren bzw. Professorinnen und 3 Assistentinnen bzw. Assistenten angehören. Auf wieviele Arten ist das möglich?

39. Wieviele Nationalflaggen mit drei horizontalen Streifen kann man aus den Farben weiß, schwarz, rot, blau, grün und gelb bilden? Zwei benachbarte Streifen müssen dabei immer verschiedenfärbig sein; der oberste und der unterste Streifen dürfen aber gleichfärbig sein (zum Beispiel rot-weiß-rot). Wieviele derartige Flaggen mit vier horizontalen Streifen gibt es?

40. Wieviele ganzzahlige Lösungen besitzt das Gleichungssystem $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 20$ und $x_1+x_2+x_3 = 7$ unter der Bedingung $x_i \ge 0$ für $1 \le i \le 6$?

41. Zeigen Sie: Es gibt genau $\frac{1}{2}(3^n+1)$ Worte der Länge n, die ausschließlich aus den Buchstaben a, b und c bestehen und die eine gerade Anzahl von a's enthalten.

42. Beweisen Sie: $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$.

43. Eine kürzlich veranstaltete Umfrage hat ergeben, daß die ProfessorInnen an der Technischen Universität Graz sehr sportlich sind: 60 % spielen Tennis, 50 % spielen Bridge, 70 % spielen Fußball, 20 % spielen Tennis und Bridge, 30 % spielen Tennis und Fußball, und 40 % spielen Fußball und Bridge. Wenn jemand behauptet, daß 20 % der ProfessorInnen alle drei Sportarten ausüben, würden Sie ihm das glauben?

44. Auf wieviele Arten kann man die Buchstaben des Wortes MATHEMATIK anordnen, sodaß die beiden T's vor beiden A's stehen, oder beide A's vor beiden M's stehen, oder beide M's vor dem E stehen?

45. Zeigen Sie für alle $n \ge 1$ die Beziehung

    $$\sum_{k=0}^{n} \sum_{r=0}^{k} \binom{n}{k} \binom{k}{r} = 3^n$$

    durch kombinatorische Überlegungen: Auf wieviele Arten kann man n Kugeln mit den Farben rot, blau und gelb färben?

46. Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n-i}{n-i}.$$

47. Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\binom{2n}{n}$ gerade.

48. Berechnen Sie den Koeffizienten von
    (a) x^5 in $(1+x)^{11}$;
    (b) a^2b^8 in $(a+b)^{10}$;
    (c) a^6b^6 in $(a^2+b^3)^5$;
    (d) x^3 in $(3+4x)^6$;
    (e) y^3 in $(2x-5y)^6$;
    (f) $x^3y^2z^4$ in $(x+y+z)^9$;
    (g) xy^3zt^2u in $(x+y+z+t+u)^8$;

49. Bestimmen Sie den Wert der folgenden Summe, in der die Summierung über alle nicht-negativen ganzen Zahlen a, b, c, d mit $a+b+c+d=29$ läuft:
$$\sum_{a,b,c,d} \frac{29!}{a!b!c!d!}$$

50. Wie viele verschiedene Wörter kann man durch Vertauschen der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI erzeugen?

51. Bestimmen Sie den Koeffizienten von $X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r}$ in $(X_1 + X_2 + \cdots + X_r)^n$.

52. Lösen Sie folgende linearen Rekursionen:

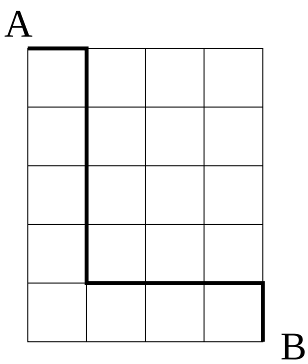
    (a) $f_{n+2} + 3f_{n+1} + 2f_n = 0$ für $n \geq 0$, $f_0 = 3$, $f_1 = -5$;

    (b) $f_{n+3} - f_{n+2} - f_{n+1} + f_n = 0$ für $n \geq 0$, $f_0 = 7$, $f_1 = 2001$, $f_2 = 4019$;

    (c) $f_{n+2} + 3f_{n+1} + 2f_n = 35 + 6n$ für $n \geq 0$, $f_0 = 8$, $f_1 = 1$;

    (d) $f_{n+3} - f_{n+2} - f_{n+1} + f_n = 720n^3 + 1320n^2 + 3 \cdot 2^n$ für $n \geq 0$, $f_0 = -3$, $f_1 = 9$, $f_2 = 136$.

53. Auf einem $m \times n$-Gitter ist die Anzahl der kürzesten Wege von A nach B gesucht, wobei man nur entlang der Kanten im Gitter wandern darf (siehe Abbildung).



54. In einem Parlament gibt es 183 Sitze und drei politische Parteien. Auf wieviele Arten können die Sitze unter den Parteien aufgeteilt werden, sodass keine der Parteien die absolute Mehrheit hat?

55. Wieviele Möglichkeiten gibt es, n Türme auf einem $n \times n$ Schachbrett aufzustellen, sodass sichergestellt ist, dass sich die Türme gegenseitig nicht werfen können? Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn nur $k < n$ Türme aufgestellt werden?

56. Was ist $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k}\right]$, die alternierende Summe der Stirling-Zahlen 1. Art, wenn n eine nichtnegative ganze Zahl ist?

57. Betrachten Sie die Differentialoperatoren $D = \frac{d}{dz}$ und $\vartheta = zD$. Es gilt zum Beispiel $\vartheta^2 = z^2D^2 + zD$, weil $\vartheta^2 f(z) = \vartheta(zf'(z)) = z\frac{d}{dz}(zf'(z)) = z^2 f''(z) + zf'(z) = (z^2D^2 + zD)f(z)$. Zeigen Sie für $n \geq 0$:

$$\vartheta^n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\} z^k D^k,$$

$$z^n D^n = \sum_k \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} \vartheta^k$$

58. Bestimmen Sie mithilfe des Lemmas von *Burnside* die Anzahl der Würfel, von denen 2 Seitenflächen rot und 4 blaugefärbt sind, wobei zwei Färbungen als gleich angesehen werden, wenn sie durch Drehung auseinander hervorgehen.

59. Ein exzentrischer Sammler von $(2 \times n)$-Domino-Belegungen zahlt € 4 für jeden vertikalen Dominostein und € 1 für jeden horizontalen Domino-Stein. Wie viele Belegungen sind nach diesem Kriterium genau € m wert?

60. Lösen Sie die Rekursion $g_0 = 1$, $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots + ng_0$ für $n > 0$.

61. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen $\{1, \ldots, 2n\}$ so in eine $2 \times n$-Matrix einzutragen, sodass die Zeilen und Spalten monoton steigend von links nach rechts bzw. von oben nach unten sind?

62. Sei $a_n = \sum_k \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}$. Geben Sie eine geschlossene Form für die erzeugende Funktion $\sum_{n\geq 0} a_n Z^n$ an.

63. Lösen Sie die Rekursion $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_k \binom{n}{k} g_k g_{n-k}$ für $n > 1$ durch exponentiell-erzeugende Funktionen.

64. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_i (-1)^i \binom{n}{i}\binom{2n+i}{2n} = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

65. Wieviele Paare von natürlichen Zahlen $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es mit $x + y \geq n$?

66. In der Mensa stehen p Menüs zur Auswahl. Wieviele verschiedene Bestellungen gibt es, wenn

    (a) q Studenten bestellen?

    (b) q Studenten bestellen, wobei mindestens die Hälfte der Studenten sich für das Menü 1 entscheiden?

    Beachte: Eine Bestellung ist ein Vektor $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ mit der Bedeutung, dass genau z_i Personen sich für Menü i entscheiden.

67. Im Kino befinden sich k Reihen, wobei die Sitze jeder Reihe von 1 bis n durchnummeriert sind. Vor der Kinokassa hat sich eine Schlange von kn Personen gebildet. Der jeweils erste der Schlange kann auswählen, in welcher Reihe er sitzen möchte. Daraufhin wird ihm der Sitz mit der kleinsten Nummer, der noch nicht belegt ist, zugewiesen. Auf wieviele Arten können die Personen auf diese Weise Platz nehmen?

68. Wieviele Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{x, y\}$ enthalten

    (a) mindestens einmal die Sequenz xy?

    (b) genau einmal die Sequenz xy?

    (c) genau zweimal die Sequenz xy?

69. Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für folgende Funktion f, die nur für Zweierpotenzen $n = 2^k$ definiert ist: $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(n) = 5f(n/2) - 6f(n/4)$.

    Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Substitution, die auf eine lineare Rekursionsgleichung 2. Ordnung führt.

70. Lösen Sie die folgenden Systeme (Paare) von Rekursionsgleichungen

    (a) $z_1 = 5$, $y_1 = 1$, $z_n = y_{n-1} + 5z_{n-1}$, $y_n = z_{n-1} + 5y_{n-1}$ für $n \geq 2$.

    (b) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $v_0 = 0$ und $v_1 = 1$ und $u_n = 2v_{n-1} + u_{n-2}$, $v_n = u_{n-1} + v_{n-2}$ für $n \geq 2$.

    (Hinweis: Führen Sie das Paar in eine einzige Rekursionsgleichung höherer Ordnung über).

71. Wie oft schreibt man die Ziffer 5, wenn man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1.000.000 niederschreibt?

72. Ein Mann hat n Freunde. Ein ganzes Jahr hindurch (365 Tage) lädt er jeweils vier von ihnen zum Abendessen ein. Wieviele Freunde muß er mindestens haben, um keine zwei Abende mit genau der gleichen Runde verbringen zu müssen?