

Einige Bemerkungen zur Integration

Integrationsregeln:

$$\begin{aligned}\text{Linearität:} & \int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx \\ \text{partielle Integration:} & \int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx \\ \text{Substitutionsregel:} & \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int f(x) \, dx \\ \text{logarithmische Regel:} & \int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)|\end{aligned}$$

Wichtige Substitutionen:

Im folgenden bezeichne $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ immer eine rationale Funktion in den Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$, dh. es gibt Polynome P und Q mit

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Typ 1: $\int R(\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x), e^x) \, dx$

Man drücke $\sinh(x)$ usw. durch e^x aus und verwende die Substitution $t = e^x$ und $dt = t \, dx$. So erhält man ein Integral über eine rationale Funktion in t , die mit Partialbruchzerlegung gelöst werden kann. Es gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Typ 2: $\int R(\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)) \, dx$

Man verwende die Substitution $t = \tan(\frac{x}{2})$, es gilt:

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad dx = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$$

Dies führt zu einem Integral über eine rationale Funktion in t .

Typ 3: $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \, dx$ mit $ad - bc \neq 0$ und $n = 2, 3, 4, \dots$

Man benutze die folgende Substitution, die zu einem Integral über eine rationale Funktion in t führt:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = n(ad - bc) \frac{t^{n-1} \, dt}{(a - ct^n)^2}$$

Typ 4: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, dx$ mit $a \neq 0$

Durch geeignete Substitution bringe man das Integral auf eine der drei Formen:

$$(a) \int R(x, \sqrt{1 - x^2}) \, dx \quad (b) \int R(x, \sqrt{1 + x^2}) \, dx \quad (c) \int R(x, \sqrt{x^2 - 1}) \, dx$$

ad (a): Man benutze die Substitution $x = \sin(t)$ mit $dx = \cos(t) \, dt$. Das führt zu einem Integral vom Typ 2.

ad (b): In diesem Fall funktioniert die Substitution $x = \sinh(t)$ mit $dx = \cosh(t) \, dt$. So erhält man ein Integral vom Typ 1.

ad (c): Unter Verwendung der Substitution $x = \cosh(t)$ und $dx = \sinh(t) \, dt$ erhält man ein Integral vom Typ 1.

Partialbruchzerlegung: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx$

Der Grad des Polynoms $P(x)$ sei echt kleiner als der von $Q(x)$ (andernfalls bringt eine Polynomdivision das Gewünschte). Im ersten Schritt zerlegt man den Nenner $Q(x)$ in $(x - a_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (x - a_n)^{\nu_n} \cdot (x^2 + b_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_m)^{\mu_m}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b_j > 0$. Im nächsten Schritt bestimmt man die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x - a_1)^1} + \frac{A_{1,2}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,\nu_1}}{(x - a_1)^{\nu_1}} + \dots + \frac{A_{n,1}}{(x - a_n)^1} + \dots + \frac{A_{n,\nu_n}}{(x - a_n)^{\nu_n}} + \\ &\quad \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + b_1)^1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + b_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,\mu_1}x + C_{1,\mu_1}}{(x^2 + b_1)^{\mu_1}} + \dots + \frac{B_{m,1}x + C_{m,1}}{(x^2 + b_m)^1} + \dots + \frac{B_{m,\mu_m}x + C_{m,\mu_m}}{(x^2 + b_m)^{\mu_m}}\end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren kann man mit Koeffizientenvergleich die Konstanten $A_{i,j}$ und $B_{k,l}, C_{k,l}$ bestimmen. Die einzelnen Summanden kann man mehr oder weniger elementar integrieren ($n > 1$):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \ln|x| & \int \frac{dx}{x^n} &= \frac{x^{1-n}}{1-n} & \int \frac{ax+b}{x^2+1} \, dx &= \frac{a}{2} \ln(x^2+1) + b \arctan(x) \\ & & \int \frac{ax+b}{(x^2+1)^n} \, dx &= \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{bx-a}{(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{(2n-3)b}{(x^2+1)^{n-1}} \, dx \right]\end{aligned}$$