# Randomisierte Algorithmen SS 2000

## 5. Übungsblatt

29. Verwenden Sie das Ergebnis aus Satz 6.1 aus der Vorlesung, um einen polynomialen Monte Carlo Algorithmus mit einseitigem Fehler für das 2-SAT Problem zu konstruieren. Ihr Algorithmus sollte immer eine korrekte Antwort für unerfüllbare Instanzen liefern. Für erfüllbare Instanzen sollte Ihr Algorithmus mit großer Wahrscheinlichkeit eine erfüllende Wertzuordnung liefern.
(Das 2-SAT Problem ist ein Spezialfall des Erfüllbarkeitproblems in dem jede Klausel aus genau zwei Literalen besteht. Gesucht wird eine erfüllende Wertzuordnung oder eine Bestätigung, daß es keine solche Zuordnung gibt.)

30. (a) Zeigen Sie, daß folgende Gleichungen gelten:

$$C(P_n) = \Theta(n^2) \quad C(K_n) = \Theta(n \log n) \quad C(L_n) = \Theta(n^3)\,,$$

wobei $P_n$, $K_n$ bzw. $L_n$ den Pfad, den vollständigen Graph bzw. den in der Vorlesung eingeführten Lollipop Graph mit $n$ Knoten bezeichnet. (Für einen gegebenen Graph $G$ ist $C(G)$ die in der Vorlesung eingeführte Überdeckungszeit.)

(b) Sei $v$ das einzige Blatt des Lollipop Graphen $L_n$ und sei $u$ der Knoten von $K_{n/2}$ an dem der Pfad der Länge $n/2$ hängt. Zeigen Sie, daß $h_{uv} = \Theta(n^3)$ und $h_{vu} = \Theta(n^2)$, wobei $h_{uv}$, $h_{vu}$ die in der Vorlesung eingeführten Zuschlagzeiten sind.

31. Sei $P$ die doppel-stochastische Übergangsmatrix einer Markov Kette. Zeigen Sie, daß die Gleichverteilung die einzige stationäre Verteilung dieser Markov Kette ist.

32. Zeigen Sie, daß der Widerstand des vollständigen Graphen mit $n$ Knoten gleich $\Theta(1/n)$ ist, d.h. $R(K_n) = \Theta(1/n)$. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, daß die obere Schranke in Satz 6.5 aus der Vorlesung scharf ist.

33. Betrachten Sie eine Irrfahrt in der Gerade der reellen Zahlen. Der Ausgangspunkt ist der Ursprung. In jedem Schritt besucht die Irrfahrt eine ganze Zahl. In den darauffolgenden Schritt besucht die Irrfahrt eine der benachbarten ganzen Zahlen jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Zeigen Sie, daß der erwartete Abstand der im $n$-ten Schritt besuchten Zahl vom Ursprung $\Theta(\sqrt{n})$ ist.

34. Betrachten Sie den in der Vorlesung entwickelten randomisierten Algorithmus für das 2-SAT Problem. Zeigen Sie, daß es erfüllbare 2-SAT Instanzen mit $n$ Variablen gibt, für die die erwartete Anzahl der vom Algorithmus ausgeführten Schritte, um eine erfüllende Wertzuordnung zu finden, $\Omega(n^2)$ ist.

35. Modifizieren Sie den in der Vorlesung entwickelten randomisierten Algorithmus für das 2-SAT Problem um einen Algorithmus für das 3-SAT Problem zu erhalten. (Das 3-SAT Problem ist ein Spezialfall des Erfüllbarkeitproblems in dem jede Klausel aus genau drei Literalen besteht.) Was kann man über die erwartete Laufzeit dieses Algorithmus aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

36. Betrachten Sie den in der Vorlesung entwickelten Schrumpf-Algorithmus für das minimale Schnittproblem (siehe Kapitel 1). Lassen Sie diesen Algorithmus laufen solange die Anzahl der Knoten des geschrumpften Graphen größer als $t$ ist. Verwenden Sie dann einen $O(n^3)$ Algorithmus, um einen minimalen Schnitt in dem geschrumpften Graphen zu bestimmen. Wiederholen Sie diesen zweistufigen Prozeß unabhängig und so oft wie notwendig, um einen minimalen Schnitt mit Wahrscheinlichkeit mindestens 1/2 bestimmen zu können. Zeigen Sie, daß aus diesem Verfahren ein $O(n^{8/3})$ Algorithmus entsteht.