Randomisierte Algorithmen SS 2000

3. Übungsblatt

15. Betrachten Sie ein Belegungsproblem mit m Bällen und n Behältern. Berechnen sie die erwartete Anzahl $E(m,n)$ der Bälle pro Behälter. Sei $m = O(n \log n)$. Zeigen Sie, daß mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$ jeder Behälter $O(\log n)$ Bälle beinhaltet. Ist $E(m,n)$ in diesem Fall ein typischer Wert für die Anzahl der Bälle pro Behälter?

16. Zeigen Sie, daß die erwartete Laufzeit des in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus "Lazy-Select" gleich $2n + o(n)$ ist.

    Hinweis: Verwenden Sie die Aussage von Satz 3.4 aus der Vorlesung: Lazy-Select bestimmt das k-kleinste Element $S_{(k)}$ aus S nach der ersten Ausführung der Schritte 1 bis 5 mit Wahrscheinlichkeit $1 - O(\frac{1}{\sqrt[4]{n}})$.

17. Sei X eine Zufallsvariable. Der k-te zentrale Moment μ_X^k von X wird folgendermaßen definiert: $\mu_X^k := E[|X - \mu_X|^k]$. Zeigen Sie, daß folgende Tschebyschev-artige Ungleichung für das k-te zentrale Moment gilt:

$$Pr\left(|X - E[X]| > t\sqrt[k]{\mu_X^k}\right) \leq \frac{1}{t^k}.$$

18. Betrachten Sie das in der Vorlesung beschriebene Sammlerproblem. Die Zufallsvariable X wird als Anzahl der Versuche definiert, die notwendig sind, um eine vollständige Sammlung zu bilden. (Eine Sammlung heißt vollständig, wenn sie mindestens ein Objekt pro Typ enthält.) Sei $\beta > 1$ eine Konstante. Geben Sie mit Hilfe der Tschebyschev'schen Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, daß $X > \beta n \ln n$ gilt.

19. Angenommen m Bälle werden auf n Behälter verteilt. Die Behälter werden unabhängig ausgewählt und für jeden Ball wird jeder Behälter mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ gewählt. Sei p die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis: Es gibt mindestens einen Behälter, der mindestens zwei Bälle beinhaltet. Geben sie eine nicht-triviale untere Schranke für m an, die $p \geq 1/2$ garantiert.

20. Ein paralleler Rechner verfügt über n Prozessoren und n Speichermodule. In einem Schritt schickt jeder Prozessor einen Auftrag an einen Speichermodul. Ein Speichermodul, der einen oder zwei Aufträge erhält, kann diese erledigen. Ein Speichermodul, der mehr als 2 Aufträge erhält, erledigt nur 2 davon und ignoriert den Rest.

    (a) Angenommen die Prozessoren wählen die Speichermodule unabhängig und jeder Speichermodul wird von jedem Prozessor mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ gewählt. Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Prozessoren deren Auftrag erledigt wird. Verwenden Sie die Approximation $(1 - 1/n)^n \approx 1/e$, wenn notwendig.

    (b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Prozessoren deren Auftrag erledigt wird für den Fall, daß in jedem Schritt jeder Speichermodul nur einen Auftrag erledigen kann.

21. **Die Gewinnwahrscheinlichkeit in "Clock solitaire".**

    "Clock solitaire" ist ein Kartenspiel in dem 52 zufällig gemischte Karten auf 13 Kartenstöße von je vier Karten aufgeteilt werden. Jeder Stoß wird mit einem Etikett aus $\{A, 2, 3, \ldots, 10, B, Q, K\}$ versehen. Im ersten Spielzug zieht man eine Karte aus dem mit K veresehenen Stoß. In den darauffolgenden Zügen wird jeweils eine Karte aus dem Stoß gezogen, dessen Etikett dem Wert der im vorhergehenden Zug gezogenen Karte entspricht. Das Spiel endet sobald man versucht aus einem leeren Stoß eine Karte zu ziehen. Das Spiel ist gewonnen, wenn am Ende des Spiels alle Karten gezogen worden sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns.