Randomisierte Algorithmen SS 2000

2. Übungsblatt

8. Zeigen sie, daß der Spielbaum $T_{2,k}$ äquivalent zu einem balanzierten binären Baum T mit folgender Eigenschaft ist: alle Blätter von T befinden sich im Abstand $2k$ von der Wurzel und die inneren Knoten berechnen die Funktion *NOR* ($\mathrm{NOR}(1,1) = \mathrm{NOR}(1,0) = \mathrm{NOR}(0,1) = 0$ und $\mathrm{NOR}(0,0) = 1$).

9. Zeigen Sie, daß es für jeden deterministischen Algorithmus für das Evaluierungsproblem eine Instanz $T_{d,k}$ gibt, für die der Algorithmus die Werte aller Blätter untersuchen muß.

10. Verallgemeinern Sie den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus BE und seine Analyse für das Evaluierungsproblem in Bäumen $T_{d,k}$ mit $d > 2$.

11. Betrachten Sie einen Baum mit Wurzel r, dessen Blätter sich im Abstand h von der Wurzel befinden. Die Wurzel und jeder innere Knoten haben jeweils drei Kinder (direkte Nachfolger). Jedem Blatt wird ein Bool'scher Wert zugeordnet. Die inneren Knoten v und die Wurzel r liefern jeweils den Bool'schen Wert, den die meisten Kinder von v bzw. r liefern. Das Evaluierungsproblem besteht darin, den von der Wurzel gelieferten Wert zu bestimmen. Die Effizienz eines Algorithmus für dieses Evaluierungsproblem wird durch die Anzahl der vom Algorithmus untersuchten Blätter gemessen.

    (a) Zeigen Sie, daß es für jeden deterministischen Algorithmus eine Instanz des Evaluierungsproblems gibt, für die der Algorithmus alle 3^h Blätter untersuchen muß.

    (b) Betrachten Sie einen rekursiven randomisierten Algorithmus, der zwei zufällig ausgewählte Teilbäume, die an der Wurzel hängen, untersucht; jedes Paar von Teilbäumen wird mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ ausgewählt. Sollten diese zwei Teilbäume verschiedene Werte liefern, so untersucht der Algorithmus den 3. Teilbaum. Zeigen Sie, daß die erwartete Anzahl der von diesem Algorithmus untersuchten Blätter höchstens $n^{0.9}$ ist, unabhängig von der Probleminstanz.

12. Bestimmen Sie den Wert V_R für folgende Matrix eines Nullsummenspiels und geben Sie optimale gemischte Strategien für beide Spieler an.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

13. Betrachten Sie einen sortierten Vektor $A[i]$ von n Zahlen ($1 \leq i \leq n$) und eine Zahl k. Man möchte überprüfen, ob k ein Eintrag des Vektors A ist. Betrachten sie nur jene Algorithmen, die in einem Schritt eine ganze Zahl i spezifizieren ($1 \leq i \leq n$) und $A[i]$ mit k vergleichen. Sei $\mathcal{A}$ ein Las Vegas Algorithmus für dieses Problem. Geben Sie (Instanz-unabhängige) untere und obere Schranken für die erwartete Anzahl der von $\mathcal{A}$ ausgeführten Schritte an.

14. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten ($|V| =: n$). Es soll bestimmt werden, ob der Graph einen Knoten mit Grad 0 besitzt. Geben Sie eine untere Schranke für die erwartete Anzahl der Schritte eines Las Vegas Algorithmus für dieses Problem. In einem Schritt wird folgende Frage beantwortet: Gibt es eine Kante $(i, j) \in E$ für ein spezifisches, vom Algorithmus in diesem Schritt ausgewähltes Knotenpaar (i, j)?