Randomisierte Algorithmen SS 2000

1. Übungsblatt

1. Sei S eine Zahlenmenge mit Kardinalität n ($n := |S|$). Sei T ein binärer Baum mit Wurzel y, der einen Lauf des RandQS Algorithmus für S repräsentiert. Der Level $l(i)$ eines Knoten $i \in S$ wird als Anzahl der Kanten des (y, i)-Weges in T definiert. Bezeichne π eine Permutation, die die Elemente $i \in S$ in aufsteigender Reihenfolge von $l(i)$ sortiert. Für gleiche Level-Werte reiht π die Elemente $i \in S$ ihrer Position in T entsprechend, und zwar von links nach rechts. Die Permutation π ist eine Zufallsvariable, die von der Kantenwahl des Algorithmus RandQS abhängt. Ist die Verteilung von π eine Gleichverteilung über alle Permutationen von S?

2. Wir modifizieren den in der Vorlesung beschriebenen randomisierten Algorithmus für das minimale Schnittproblem wie folgt: Statt einer Kante schrumpft man in jeder Iteration ein Knotenpaar (i, j). Falls (i, j) eine Kante ist, so ist das Schrumpfen des Knotenpaares (i, j) nichts anderes als das Schrumpfen der Kante (i, j). Andernfalls wird der Graph analog wie beim Schrumpfen einer Kante aktualisiert, mit dem einzigen Unterschied, daß keine Kante (i, j) entfernt wird (da es keine solche Kante gibt). Zeigen Sie, daß es Klassen von Graphen gibt, für die dieser modifizierte Algorithmus $\mathcal{A}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit keine optimale Lösung bestimmt; für die Wahrscheinlichkeit p, daß $\mathcal{A}$ eine optimale Lösung liefert, gilt in diesem Fall $p \leq 1/a^n$, wobei $a \in \mathbb{N}$ und n die Anzahl der Knoten bezeichnet.

3. Sein $\mathcal{A}$ ein Monte Carlo Algorithmus für ein Problem P und sei $T(n)$ die erwartete Laufzeit von $\mathcal{A}$ für jede P-Instanz der Größe n. Für jede P-Instanz der Größe n liefert $\mathcal{A}$ eine korrekte Lösung mit Wahrscheinlichkeit $\gamma(n)$. Weiters wird angenommen, daß die Korrektheit einer beliebigen Lösung von P in $t(n)$ Zeit verifiziert werden kann. Entwickeln Sie einen Las Vegas Algorithmus, der immer eine korrekte Lösung für P liefert und erwartete Laufzeit $(T(n) + t(n))/\gamma(n)$ hat.

   Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Verteilung. Eine Münze wird so oft geworfen bis Kopf fällt. Angenommen jeder Wurf wird durch die Bernoulli Verteilung mit Parameter p, $0 < p < 1$, beschrieben: es fällt Kopf mit Wahrscheinlichkeit p und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Die Anzahl der Münzwürfe bis zum erstmaligen Auftreten von Kopf ist eine Zufallsvariable. Die Verteilung dieser Variable heißt *geometrische Verteilung mit Parameter p*.

4. Seien ϵ_1 und ϵ_2 zwei reelle Zahlen, $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1 < 1$. Betrachten Sie ein Problem P und einen Monte Carlo Algorithmus, der für jede P-Instanz eine korrekte Lösung mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \epsilon_1$ liefert. Wie viele unabhängige Wiederholungen dieses Algorithmus würden ausreichen, um für jede P-Instanz eine korrekte Lösung mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \epsilon_2$ zu produzieren?

5. Betrachten Sie einen Algorithmus mit einem zweiseitigen Fehler (vgl. Definition der Klasse PP). Zeigen Sie, daß eine polynomiale Anzahl von unabhängigen Wiederholungen dieses Algorithmus nicht unbedingt ausreichen muß, um die Fehlerwahrscheinlichkeit auf 1/4 zu reduzieren.

   Hinweis: Betrachten Sie den Fall eines Monte Carlo Algorithmus mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$, wobei n die Problemgröße ist.

6. Ein Schiff kommt in einem Hafen an und die n Matrosen des Schiffes gehen in die Stadt zum Rummel. Dannach kommen sie betrunken auf das Schiff zurück und jeder wählt zufällig eine Schlafkabine aus.

   (a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Matrosen die in ihrer eigenen Schlafkabine schlafen.

   (b) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, daß kein Matrose in seiner eigenen Schlafkabine schläft, konvergiert gegen $1/e$, wenn die Gesamtanzahl n der Matrosen gegen unendlich strebt.

7. Geben Sie eine obere Schranke für die Anzahl der minimalen Schnitte in einem Multigraphen G mit n Knoten an.

   Hinweis: Betrachten Sie den in der Vorlesung beschriebenen randomisierten Algorithmus für das minimale Schnittproblem. Erzeugt dieser Algorithmus einen zufälligen Schnitt aus einer Gleichverteilung über alle Schnitte in G? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt der Algorithmus einen minimalen Schnitt?