Operations Research WS 2000/2001

3. Übungsblatt

12. Sei X eine nichtleere, abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$. Sei $C(X)$ die Menge der auf X stetigen, beschränkten Funktionen. In $C(X)$ wird durch $\|v\| = \sup_{x \in X} |v(x)|$, $v \in C(X)$, eine Norm definiert. Zeigen Sie, daß durch $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm definiert wird.
    Mit Hilfe der oben definierten Norm läßt sich in $C(X)$ eine Metrik definieren: $d(u, v) = \|u - v\|$, für alle $u, v \in C(X)$. Zeigen Sie, daß der metrische Raum $(C(X), d)$ ein Banach-Raum ist, d.h. daß die Metrik d in $C(X)$ vollständig iat.

13. Betrachten Sie die nachfolgende Metrik d in $\mathbb{R}^m$ und den nachfolgenden Operator $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$:

    $$d(\vec{v}, \vec{w}) := \max_{1 \le i \le m} |v_i - w_i|, \text{ für alle } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^m$$

    $$T(\vec{v}) = \vec{w} \text{ und } w_i := \min_{\sigma = 1,2,\ldots,s_i} \left\{ \bar{g}(i, u_{i\sigma}) + \alpha \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(u_{i\sigma}) v_k \right\},$$

    wobei $\alpha \in (0, 1)$ eine Konstante ist. Für jedes i und für jedes $u_{i\sigma}$ sind $p_{ik}(u_{i\sigma}) \in (0, 1)$ gegebene Konstanten mit $\sum_{k=1}^{m} p_{ik}(u_{i\sigma}) = 1$. Weiters sind $\bar{g}(i, u_{i\sigma})$ gegebene Konstanten für jedes i und für jedes $u_{i\sigma}$. Zeigen Sie, daß der Operator T kontrahierend ist. Unmittelbar daraus folgt dann der Beweis von Satz 5.1 aus der Vorlesung. Wie und warum?

14. Die Glück-und-Pech Produktionsgesellschaft hat einen Auftrag bekommen ein Stück von einem ganz bestimmten Produkt zu liefern. Der Kunde hat jedoch so strenge Qualitätsvorschriften angegeben, daß der Produzent mehr als ein Stück fertigen muß, um ein Stück zu erhalten, daß vom Kunden akzeptiert wird. Der Produzent schätzt, daß jede produzierte Einheit von diesem Gegenstand mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 angenommen werden kann und mit der Wahrscheinlichkeit 1/2 ohne Möglichkeit zur Nachbearbeitung mangelhaft ist. Die marginalen Produktionskosten für dieses Produkt werden auf 100\$ pro Stück geschätzt (gilt auch für einen mangelhaften Teil). Es fallen zusätzlich auflagenfixe Kosten in Höhe von 300\$ an, wenn der Fertigungsprozeß für dieses Produkt gestartet wird. Wenn sich bei der Prüfung herausstellt, daß ein kompletes Los keinen akzeptablen Teil enthält, muß der Produktionsprozeß erneut gestartet werden, wobei weitere zusätzliche Kosten in Höhe von 300\$ anfallen. Der Produzent kann aus zeitlichen Gründen nicht mehr als drei Produktionsläufe machen. Hat man auch nach dem dritten Produktionslauf noch keinen guten Teil erhalten, so sind dem Produzenten Kosten in Höhe von 1600\$ für den verlorengegangenen Verkaufserlös und für Strafkosten entstanden.

    Bestimmen Sie eine Politik, die die optimalen Losgrößen für die erforderlichen Produktionsläufe vorgibt und dabei die erwarteten Gesamtkosten des Produzenten minimiert.

15. Eine unternehmungslustige Statistikerin glaubt, daß sie ein System entwickelt hat, mit dem sie ein beliebtes Las-Vegas-Spiel gewinnen kann. Ihre Kollegen glauben nicht, daß ihr System funktioniert. So haben sie mit ihr eine Wette abgeschlossen, daß sie - mit drei Chips beginnend - nach dreimaligem Spiel keine fünf Chips haben wird. Jedes Spiel verlangt, daß irgendeine gewünschte Anzahl von vorhandenen Chips gesetzt wird, und diese Anzahl dann entweder gewonnen oder verloren wird. Die Statistikerin glaubt, daß das System ihr die Chance gibt, ein Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3 zu gewinnen.

    Unter der Annahme, daß die Statistikerin recht hat, soll die optimale Politik bestimmt werden, die angibt wieviele Chips (wenn überhaupt) bei jedem der 3 Spiele gesetzt werden sollen. Bei jedem Spieldurchlauf sollte die Entscheidung die Ergebnisse früherer Spiele berücksichtigen. Das Ziel besteht darin die Wahrscheinlichkeit zu maximieren daß die Statistikerin die Wette mit Ihren Kollegen gewinnt.

16. Stellen Sie sich vor, Sie besitzen 5000$, die Sie investieren können. Sie haben die Gelegenheit, diesen Betrag am Anfang jedes der drei folgenden Jahre in eine von zwei Anlagemöglichkeiten zu investieren. Beide Investitionen führen zu unsicheren Rückflüssen. Bei Kapitalanlage A verliert man entweder sein gesamtes Geld oder (mit größerer Wahrscheinlichkeit) bekommt man 10000$ (der Gewinn beträgt 5000$) am Ende des Jahres zurück. Bei Investition B bekommt man entweder gerade die eingesetzten 5000$ oder (mit geringer Wahrscheinlichkeit) 10000$ am Ende des Jahres zurück. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse lauten:

Investition	Rückfluß ($)	Wahrscheinlichkeit
A	0	0.4
	10000	0.6
B	5000	0.9
	10000	0.1

Es ist nur erlaubt, jedes Jahr höchstens eine Investition zu tätigen, und man kann jedes mal nur 5000$ anlegen. (Jeder zusätzliche angesammelte Geldbetrag ist zur anderweitigen Verfügung übrig.)

(a) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die den erwarteten Geldbetrag maximiert, den man nach drei Jahren hat.

(b) Verwenden Sie die dynamische Optimierung, um die Investitionspolitik zu finden, die die Wahrscheinlichkeit dafür maximiert, daß man nach drei Jahren mindestens 10000$ besitzt.

17. Ein Chemieunternehmen produziert zwei chemische Produkte, die mit 0 und 1 bezeichnet werden sollen. Jedes Monat erfolgt eine Entscheidung darüber, welches chemische Produkt produziert werden soll. Da der Bedarf jeder Chemikalie vorhersehbar ist, weiß man, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 im nächsten Monat Produkt 1 produziert wird, wenn Produkt 1 auch im laufenden Monat produziert wird. Wird im laufenden Monat Produkt 0 produziert, so wird dieses Produkt mit Wahrscheinlichkeit 0.2 auch im nächsten Monat produziert.

Um die Emissionen zu bekämpfen, hat das Unternehmen zwei Produktionsprozesse zur Verfügung: Prozeß A, der bei der Bekämpfung der Umweltverschmutzung durch Produktion von Produkt 1 aber nicht bei derjenigen durch Produktion von Produkt 0 effizient ist, und Prozeß B, der bei der Bekämpfung der Verschmutzung durch die Produktion von Produkt 0 aber nicht von Produkt 1 effizient ist. Der Umfang der Verschmutzung durch die Produktion einer jeden Chemikalie bei beiden Prozessen sieht folgendermaßen aus:

	0	1
A	100	10
B	10	30

Leider tritt bei dem Ingangbringen der Prozesse, die eine Kontrolle der Verschmutzung erlauben, eine Zeitverzögerung auf, sodaß die Entscheidung über den zu verwendenden Produktionsprozeß ein Monat vor der Produktionsentscheidung getroffen werden muß. Verwenden Sie die Politikiteration um eine Politik zur Verschmutzungskontrolle zu ermitteln, die bei einem Diskontierungsfaktor von $\alpha = 0.5$ den erwarteten Wert aller zukünftigen Verschmutzungen minimiert.

18. Führen Sie für Beispiel 17 zwei Wertiterationen durch, um eine Näherung für die optimale Lösung zu erhalten.