Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

6. Übungsblatt

36. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine $m \times m$ Matrix und seien λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, die Eigenwerte von A mit Vielfachheit jeweils n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Sei $J := \oplus_{i=1}^k J_{n_i}(\lambda_i)$ die Jordan'sche Normalform von A wobei $J_{n_i}(\lambda_i)$ Jordan-Matrizen wie in der Vorlesung sind.

    (a) Zeigen Sie, daß A dann und nur dann Potenz-konvergent ist, wenn J Potenz-konvergent ist.

    (b) Zeigen Sie, daß folgende Gleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Jordan-Matrix $J_k(\lambda)$ gilt:

$$[J_k(\lambda)]^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \ldots & \binom{n}{n-k}\lambda^{n-k} & \binom{n}{n-k+1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \ldots & \binom{n}{n-k-1}\lambda^{n-k-1} & \binom{n}{n-k}\lambda^{n-k} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ldots & \binom{n}{n-k-2}\lambda^{n-k-2} & \binom{n}{n-k-1}\lambda^{n-k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

    (c) Zeigen Sie, daß eine Jordan-matrix $J_{n_i}(\lambda_i)$ dann und nur dann Potenz konvergent ist wenn $|\lambda_i| < 1$ oder $\lambda_i = n_i = 1$.

37. Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $\rho(M)$ der Spektralradius von M. Zeigen Sie, daß folgende Ungleichungen gelten:

$$\rho(M) \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \text{ und } \rho(M) \le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|\,.$$

38. Sei A die untenstehende 3×3 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

    (a) Bestimmen Sie den Spektralradius $\rho(A)$.

    (b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty}(\rho(A)^{-1}A)^n$.

39. Sind die untenstehenden Matrizen A_1 und A_2 irreduzierbar? Sind diese Matrizen primitiv?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    Hinweis: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt folgende Aussage: $A^{(n-1)^2+1} > 0$ dann und nur dann wenn es eine natürliche Zahl k gibt, sodaß $A^k > 0$.

40. Sei $A \ge 0$ eine $n \times n$ Matrix und sei $x > 0$ ein n-dimensionaler Vektor. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\min_{1\le i\le n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \le \rho(A) \le \max_{1\le i\le n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

$$\min_{1\le j\le n} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \le \rho(A) \le \max_{1\le j\le n} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i}$$

41. Betrachten Sie ein Fußballtournier in dem fünf Manschaften um den ersten Platz kämpfen. Jede Manschaft spielt genau einmal gegen jede andere Manschaft. Die Ergebnisse der vergangenen Tourniere werden statistisch durch die Matrix $F = (f_{ij})$ zusammengefaßt:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

f_{ij} stellt den Anteil der Spiele zwischen den Manschaften i und j dar, die von Manschaft i gewonnen wurden. Man möchte ein “faires” Wettsystem organisieren in dem jede Manschaft für jedes verlorene Spiel dem Sieger eine gewisse Geldsumme bezahlen sollte. Diese Geldsummen sollten so bestimmt werden, daß der erwartete Nettogewinn jeder Manschaft gleich Null ist. Ist es möclich so ein Wettsystem zu entwickeln?

42. Betrachten Sie ein offenes Leontief-Modell mit folgender Inputmatrix T

$$T = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Sei $A := I - T$.

(a) Zeigen Sie, daß A^{-1} durch die untenstehende Matrix approximiert werden kann, wobei die Matrixeinträge auf zwei Dezimalstellen abgerundet wurden.

$$A^{-1} = \frac{1}{0.38} \begin{pmatrix} 0.66 & 0.30 & 0.24 \\ 0.34 & 0.64 & 0.24 \\ 0.21 & 0.27 & 0.60 \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie, daß das obige offene Modell zulässig ist und berechnen Sie die Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 für folgende Werte des externen Bedarfs: $d_1 = 10$, $d_2 = 5$, $d_3 = 6$.

43. Betrachten sie das offene Leontief-Modell mit folgender Inputmatrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Ist dieses Modell zulässig?

44. Betrachten Sie das geschloßene Leontief-Modell, das durch das folgende Gleichungssystem beschrieben wird:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1x_1 + 0.2x_2 \\ x_2 &= 0.3x_2 + 0.3x_3 \\ x_3 &= 0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.7x_3 \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß das obige Modell zulässig ist.

(b) Zeigen Sie, daß das obige Modell einen Gleichgewichtsproduktionsvektor (x_1, x_2, x_3) besitzt, der bis auf einen skalaren Faktor eindeutig ist. Berechnen Sie den Gleichgewichtsproduktionsvektor mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.