Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

2. Übungsblatt

7. Gegeben sei folgendes mathematisches Modell

$$\max Z = 3x_1 + 2f(x_2) + 2x_3 + 3g(x_4)\,,$$

unter Einhaltung der Nebenbedingungen:

1. $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 15$
2. Mindestens zwei der vier folgenden Ungleichungen werden eingehalten:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 &\leq 10 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &\leq 10 \end{aligned}$$

3. $|x_1 - x_2| = 0$, oder $|x_1 - x_2| = 3$, oder $|x_1 - x_2| = 6$.
4. $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, mit

$$f(x_2) = \begin{cases} -5 + 3x_2 & \text{wenn } x_2 > 0 \\ 0 & \text{wenn } x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{und } g(x_4) = \begin{cases} -3 + 5x_4 & \text{wenn } x_4 > 0 \\ 0 & \text{wenn } x_4 = 0 \end{cases}$$

Formulieren Sie dieses Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Program (MIP) (d.h. nur *einige* Variablen müßen ganzzahlig sein; die anderen Variablen dürfen reelle Werte annehmen).

8. Gegeben sei folgendes Problem:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 5x_1 + x_2 \\ \text{udNB} & \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ sind ganzzahlig} \end{array} \tag{1}$$

(a) Lösen Sie dieses Problem (graphisch).

(b) Lösen Sie die LP-Relaxation graphisch. Runden Sie diese Lösung auf die *am nächsten liegende* ganzzahlige Lösung und überprüfen Sie letztere auf Zulässigkeit. Ist diese Lösung optimal für Problem (1)? Zählen Sie dann alle gerundeten Lösungen auf (d.h. ausgehend von der optimalen Lösung der LP-Relaxation runden Sie jeden nichtganzzahligen Wert entweder auf oder ab), überprüfen Sie diese gerundeten Lösungen auf Zulässigkeit und berechnen Sie für die zulässigen unter diesen Lösungen den Wert von Z. Gibt es unter diesen gerundeten, zulässigen Lösungen eine optimale Lösung für Problem (1)?

9. Die zulässigen Bereiche der kontinuierlichen Variablen von zwei gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblemen (mit jeweils zwei kontinuierlichen Variablen) sind in Abbildung 1a bzw. Abbildung 1b abgebildet. Bestimmen Sie für jedes Problem eine Menge von Restriktionen, die den dazugehörigen zulässigen Bereich beschreiben.

10. Eine Fluggesellschaft erwägt den Kauf von neuen Lang-, Mittel-, und Kurzstreckenpassagierflugzeugen. Der Kaufpreis beträgt 33,5 Millionen Dollar für jedes Langstreckenflugzeug, 25 Millionen Dollar für jedes Mittelstreckenflugzeug und 17,5 Millionen Dollar für jedes Kurzstreckenflugzeug. Der Vorstand hat ein maximales Budget von 750 Millionen Dollar für diese Einkaufsentscheidung bewilligt. Unabhängig davon welche Flugzeuge gekauft werden, wird von dem Flugreiseaufkommen in jeder der drei Kategorien Lang-, Mittel- und Kurzstrecke erwartet, daß es groß genug sei diese Flugzeuge mit der notwendigen Maximalauslastung einzusetzen. Es wird geschätzt, daß sich der jährliche Reingewinn (nach Abzug von Kapitalrückflußkosten) auf 2,1 Millionen Dollar pro Langstreckenflugzeug, 1,5 Millionen Dollar pro Mittelstreckenflugzeug und 1,15 Millionen Dollar pro Kurzstreckenflugzeug beläuft. Es wird untergestellt, daß genügend geschulte Piloten der Gesellschaft zur Verfügung stehen, um 30 neue Flugzeuge zu besetzen. Falls nur Kurzstreckenflugzeuge gekauft werden, würden die Wartungseinrichtungen ausreichen, um 40 neue Flugzeuge zu betreuen. Jedes Mittelstreckenflugzeug entspricht 4/3 und jedes Langstreckenflugzeug 5/3 Kurzstreckenflugzeugen hinsichtlich ihrer Beanspruchung der Wartungsvorrichtungen. Die vorhandenen Informationen wurden im Rahmen einer ersten Problemanalyse ermittelt. Eine tiefergehende Untersuchung wird später durchgezogen werden. Das Managment möchte jedoch auf der Grundlage der vorliegenden Daten als eine erste Annäherung wissen, wieviele Flugzeuge von jedem Typ gekauft werden sollten, um den Gewinn pro Jahr zu maximieren.

    Formulieren Sie das IP-Modell für diese Fragestellung.

11. Antenne Steiermark (AS) organisiert die Werbeeinschaltungen in Werbungsblöcken von 60 Sekunden. AS hat für die nächste Stunde Werbungszeit für Werbeeinschaltungen der Längen 15, 16, 20, 25, 30, 35, 40 bzw. 50 Sekunden verkauft. Formulieren Sie ein IP-Modell zur Bestimmung der minimalen Anzahl der Werbungsblöcke, die für die Sendung der obengenannten Werbeeinschaltungen ausreicht.

12. Der Telephondienst einer Fluggesellschaft arbeitet rund um die Uhr. Tabelle 1 gibt die Anzahl der Telephondienstangestellten an, die für die zufriedenstellende Bearbeitung aller ankommenden Anrufe in 6 gegebenen Zeitintervallen des Tages benötigt werden. Jeder Angestellte beginnt seinen Dienst am Anfang eines der sechs Zeitintervalle und arbeitet dann 8 hintereinanderfolgende Stunden. Sei x_t die Anzahl der Angestellten die ihren Dienst am Beginn von Zeitintervall t aufnehmen. Formulieren Sie ein IP-Modell zur Bestimmung der optimalen Werte von x_t, $t = 1, 2, \ldots, 6$, die die zufriedenstellende Bearbeitung aller Anrufe rund um die Uhr garantieren und die Gesamtanzahl von Telephondienstangestellten minimieren.

Nr.	Zeitintervall	Mindestanzahl der benötigten Angestellten
1	3:00 bis 7:00	26
2	7:00 bis 10:00	52
3	10:00 bis 14:00	86
4	14:00 bis 17:00	120
5	17:00 bis 21:00	75
6	21:00 bis 3:00	35

Tabelle 1: Daten zu Beispiel 12

13. Eine Montagelinie wurde für die Erzeugung eines bestimmten Bauteiles entwickelt. Für die Erzeugung von jedem Stück müssen 7 Operationen i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, durchgeführt werden. Jede Operation darf jederzeit nach dem Beenden aller unmittelbaren Vorgängeroperationen gestartet werden. Tabelle 2 gibt für jede Operation die dazugehörigen unmittelbaren Vorgängeroperationen an. Weiters gibt Tabelle 2 die Bearbeitungszeit für jede Operation in Sekunden an. Die Taktzeit der Montagelinie beträgt 20 Sekunden, d.h. jeder Arbeiter kann an einen Teil für höchstens 20 Sekunden arbeiten; dann muß er den Teil in die Linie zurückgeben. Jeder Arbeiter darf jede Menge von Operationen durchführen solange die Gesamtbearbeitungszeit 20 Sekunden nicht überschreitet und die Vorgänger-Nachfolger Restriktionen eingehalten werden. Das Ziel ist eine Zuordnung der Operationen zu den

Operation	Unmittelbare Vorgänger	Bearbeitungszeit (in Sekunden)
1	-	7
2	-	9
3	1,2	6
4	1	4
5	3	8
6	4	7
7	5,6	5

Tabelle 2: Daten zu Beispiel 13

Arbeitern zu bestimmen, die die Einhaltung aller oben erwähnten Restriktionen garantiert und die Anzahl der benötigten Arbeiter minimiert.

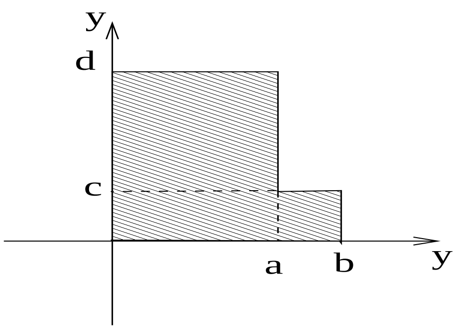

Abbildung 1a

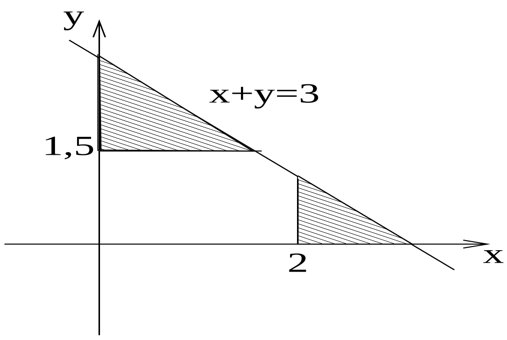

Abbildung 1b