

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften WS 2000/2001

5. Hausübung – Abzugeben bis Montag 27.11.2000

Betrachten Sie ein abgeschlossenes Handelssystem, das aus vier Unternehmen besteht, die mit einem Handelsartikel untereinander handeln. Es wird angenommen, daß gewisse Mengen des Handelsartikels täglich den Besitzer wechseln während die Gesamtmenge konstant bleibt. Die täglich ver- und gekauften Mengen des Handelsartikels werden von einer vom Zeitindex unabhängigen Matrix $C = (c_{ij})$ spezifiziert:

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c_{ij} ist der Anteil der sich im Besitz des Unternehmen j befindenden Menge des Handelsartikels, der vom Unternehmen i gekauft wird. Sei v_i die sich im Besitz des Unternehmen i befindende Menge des Handelsartikels zum heutigen Tag, $i = 1, 2, 3, 4$.

- (a) Wie sieht die Mengenverteilung des Handelsartikels nach 10 Tagen, nach 20 Tagen bzw. nach unendlich vielen Tagen aus? Geben Sie eine theoretische Begründung für Ihre Antwort.

Hinweis: Beweisen und dann verwenden Sie folgende Gleichung:

$$C^n = \begin{bmatrix} X^n & O \\ Y \sum_{j=0}^{n-1} X^j & I \end{bmatrix} \quad \text{wobei}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Betrachten Sie eine neue Matrix C , die die ver- und gekauften Mengen des Handelsartikels spezifiziert:

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Wie sieht in diesem Fall die Mengenverteilung des Handelsartikels nach 10 Tagen, nach 20 Tagen bzw. nach unendlich vielen Tagen aus? (Die Ausgangsmengen sind nachwievor v_i , $i = 1, 2, 3, 4$.) Geben Sie eine theoretische Begründung für Ihre Antwort.

- (c) Vergleichen Sie die Ergebnisse von (a) und (b). Woran liegt der Grund für den wesentlichen Unterschied zwischen diesen Ergebnissen? Wie läßt sich das Ergebnis vom (b) für eine ganze Klasse von Matrizen C verallgemeinern?