Optimierung in der Finanzmathematik SS 2016

3. Übungsblatt

13. (Das Lockbox-Problem)

a) Betrachten Sie den Fall einer Firma, die Schecks aus mehreren Geschäftsfilialen bekommt. Die Zeitspanne zwischen der Bezahlung eines Schecks und dessen Verrechnung hängt von der Entfernung zwischen Geschäftsfiliale und Verrechnungsstelle ab. Selbst wenn diese Zeitspanne wenige Tage beträgt, so entsteht es der Firma bei großen Geschäftsvolumina ein zinssatz- oder reinvestitionsbedingter Verlust. Wenn zB. von der Geschäftsfiliale A Schecks in Wert von B in die Verrechnungsstelle C zur Verrechnung geschickt werden und die Zeitspanne zwischen erfolgtem Geschäft und Verrechnung zwei Trage beträgt, dann schreibt die Firma einen Verlust von pB, wobei p der tägliche Zinssatz oder die Reinvestitionsrate ist. Die Firma erwägt daher die Eröffnung von Verrechnungsstellen an manchen Geschäftsfilialen (*lockboxes*), sodass die obenen beschriebenen Verluste minimiert werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Eröffnung einer Verrechnungsstelle in Geschäftsfiliale j mit fixen Investitionskosten f_j einhergeht. Weiters wird angenommen, dass die Zeitspannen zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale i und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle j für alle Paare $i, j = 1, 2, \ldots, n$ bekannt sind. Auch die Reinvestitionsrate p sei bekannt. Formulieren Sie dieses Problem als (gemischt)-ganzzahliges lineares Programm.

(b) Betrachten Sie ein Lockbox-Problem in dem es keine fixen Eröffnungskosten für die Verrechnungstellen gibt, sondern Kosten der Zordnung der Geschäftsfilialen zu den Verrechnungsstellen: seien c_{ij} die Zuordnungskosten der Geschäftsfiliale i zur Verrechnungsstelle j, für alle Filialen i, $1 \leq i \leq n$, und für alle möglichen Verrechnungsstellen j, $1 \leq j \leq n$. Es wird angenommen, dass genau q Lockboxes betrieben werden sollen, für ein gegebenes q mit $1 \leq q \leq n$. Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem um die optimalen zu betreibenden Verrechnungsstellen zu bestimmen, sodass die Gesamtkosten der Zuordnung jeder Geschäftsfiliale zu einer in Betrieb genommenen Verrechnungstelle minimiert werden.

(c) Geben Sie zwei Alternativen für die Fomulierung folgender Restriktion an: Die Geschäftsfilialen können Schecks nur zu betriebsbereiten Verrechnungsstellen senden.

(d) Lösen und vergleichen sie die LP-Relaxationen der zwei oben genannten Formulierungen des Problems aus (b) für $q = 2$ und

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Betrachten Sie das untenstehende ganzzahlige lineare Problem (ILP)

$$\begin{array}{ll} \max & 10x_1 + 13x_2 \\ \text{udNb} & \\ & 10x_1 + 14x_2 \leq 43 \\ & x_1\,, x_2 \geq 0 \\ & x_1\,, x_2 \text{ ganzzahlig} \end{array}$$

(a) Führen Sie die Schlupfvariable x_3 ein und lösen Sie die lineare Relaxation des obigen ILP mit Hilfe der Simplexmethode. Sie sollten die Optimallösung $x_1 = 4.3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ erhalten.

(b) Erzeugen Sie einen Gomory Schnitt, der diese Lösung abschneidet.

(c) Multiplizieren Sie die Restriktion $x_1 + 1.4x_2 + 0.1x_3 = 4.3$ (vgl. optimales Simplextableau) mit der Konstanten $k = 2$ und erzeugen Sie den dazugehörigen Gomory Schnitt. Wiederholen Sie diesen Schritt für $k = 3$, $k = 4$ und $k = 5$. Vergleichen Sie die fünf erzeugten Gomory Schnitte.

(d) Erweitern Sie die LP Relaxation des ursprünglichen Problems um den nach der Multiplikation mit $k = 3$ erzeugten Gomory Schnitt (vgl. Punkt (c)). Lösen Sie das resultierende lineare Problem mit dem Simplexverfahren. Wir lautet die Optimallösung des ILP?

15. Angenommen Sie können 250000,00 Euro in einem der folgenden fünf Projekte mit den angegebenen Cash-Flows investieren.

	1. *Jahr*	2. *Jahr*	3. *Jahr*	4. *Jahr*
1. *Projekt*	$-1,00$		1.18	
2. *Projekt*		$-1,00$		1.22
3. *Projekt*			-1	1.10
4. *Projekt*	$-1,00$	$0,14$	$0,14$	1.00
5. *Projekt*		$-1,00$	$0,20$	1.00

Wenn Sie z.B. am Anfang des 1. Jahres 1 Euro im 1. Projekt investieren, dann erhalten Sie 1,18 Euro zu Beginn des 3. Jahres. Die minimale Investitionsgrenze ist 100000,00 Euro pro Projekt. Zu Jahresbeginn kann der gesamte Geldbetrag eines jeden Projekts in einem Cash-Account mit jährlichen Zinsen von 3% investiert werden. Formulieren Sie ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem um einen Investitionsplan zu bestimmen, der den verfügbaren Geldbetrag zu Beginn des 4. Jahres maximiert. Lösen Sie dieses Problem mit einem Solver ihrer Wahl.

16. Angenommen Sie halten ein Portfolio P bestehend aus 8 Positionen mit den in der untenstehenden Tabelle gegebenen Gewichten. Es wird weiters angenommen, dass das Markowitz'sche Optimierungsproblem gelöst wurde um ein sogenanntes *mean-variance* (M/V) Portfolio zu bestimmen, dessen Gewichte ebenfalls in der untenstehenden Tabelle angegeben sind.

Position	A	B	C	D	E	F	G	H
Portfolio P	0,12	0,15	0,13	0,10	0,20	0,10	0,12	0,08
M/V Portfolio	0,02	0,05	0,25	0,06	0,18	0,10	0,22	0,12

Tabelle 1: Data for Beispiel 16

Sie möchten Ihr Porftolio so umschichten, dass es ähnlicher zum M/V Portfolio wird. Andererseits wollen Sie hohe Transaktionskosten vermeinden und beschließen daher nur drei Positionen im Portfolio umzuschichten. Seien x_i die Gewichte im umgeschichteten Portfolio. Das Ziel ist es folgende Summe zu minimieren

$$|x_1 - 0,02| + |x_2 - 0,05| + |x_3 - 0,25| + \ldots + |x_8 - 0,12|\,,$$

die ein Maß für die Ähnlichkeit des umgeschichteten Portfolios mit dem M/V Portfolio darstellt.

Formulieren Sie dieses Problem als gemischt-ganzzahliges lineares Programm und lösen Sie es mit einem Solver Ihrer Wahl.

17. Betrachten Sie ein M/V Portfolio bestehend aus 8 Aktienindizes `S&P 500`, `NASDAQ Composite`, `FTSE 100`, `Euro Stoxx 50`, `Nikkei 225`, `Dow Jones Industrial Average`, `Russell 2000` and `DAX` . Angenommen Sie wollen ein Portfolio zusammenstellen, dass in höchtens 5 Positionen investiert ist, in jeder Position nicht mehr als 30% des Kapitals investiert, einen vorgegebenen erwarteten monatlichen Ertrag nicht unterschreitet und die Varianz des monatliches Portfolioertrags minimiert.

    Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines Branch-and-Bound Verfahrens bei dem in jedem Knoten des Branch-and-Bound Baumes ein konvexes quadratisches Optimierungsproblem gelöst werden muss. Diese quadratischen Probleme können Sie mit einem Solver ihrer Wahl lösen. Als Inputdaten sollen die adjustierten monatlichen Schlusskurse der acht Positionen (`adjClose`[1]) für den Zeitraum Jänner 2003-Dezember 2008 dienen; diese Daten können etwa aus `finance.yahoo.com` heruntergeladen werden.

[1] Das sind bzgl. Dividende und Splits adjustierte Schlusskurse