Optimierung in der Finanzmathematik SS 2016

1. Übungsblatt

1. Der Cash-Flow eines Unternehmens sieht für die nächsten acht Quartale folgendermaßen aus:

Quartal	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Geldfluss (in Tsd. Euro)	120	470	90	-570	-510	210	590	-880

Die Einnahmen (Ausgaben) sind als negative (positive) Einträge dargestellt. Das Unternehmen hat drei Finanzierungsmöglichkeiten.

- Ein Kredit mit Laufzeit zwei Jahre und $1,5\%$ Zinsen pro Quartal.
- Zwei andere Kredite mit Laufzeit 6 bzw. 3 Monate und Zinsen von $1,7\%$ bzw. $2,6\%$ pro Quartal. Diese zwei Kredite sind jeweils zum Quartalsbeginn verfügbar.

Die Rückzahlung der Kredite erfolgt am Ende der jeweiligen Laufzeit, während die Zinsen in jedem Quartal entrichtet werden.

Die Überschüsse können mit einem Zinssatz von $0,75\%$ pro Quartal investiert werden.

Es soll ein Finanzierungsplan ermittelt werden, der das Vermögen des Unternehmens am Anfang des 9. Quartals maximiert.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (LP) und lösen Sie das LP mit einem Solver Ihrer Wahl.

(b) Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das Problem aus Übungsbeispiel 1.

(i) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 310 (statt 470). Wie würde dies das Vermögen des Unternehmens am Beginn von Quartal 9 beeinflussen?

(ii) Angenommen der Cash-Flow in Q2 ist 110 (statt 470). Kann die Sensitivitätsanalyse zur Bestimmung des Vermögens am Beginn von Quartal 9 verwendet werden?

(iii) Einer der Lieferanten könnte die Verschiebung einer Zahlung über 100 Euro von Q3 auf Q4 erlauben. Welcher wäre der faire Preis dieses Angebots?

2. Ein kleiner Pensionsfonds hat die untenstehenden Verpflichtungen (in Millionen von Euro) und möchte ein *zweckgebundenes Portfolio (dedicated portfolio)* aus Anleihen konstruieren. Dies ist ein sogenanntes *statisches* Portfolio, dessen Cashflow den gegebenen Veprflichtungen exakt entsprechen soll und bis am Ende des Planungshorizont nicht umgeschichtet wird. Also wird der Cashflow des Portfolios dazu verwendet um die Verpflichtung zu bedienen, wobei nach der Aufstellung des Portfolios bis zum Ende des Zeithorizonts keine Aktien gekauft bzw. verkauft werden.

Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8	Jahr 9
28	24	30	25	29	31	30	35	31

Folgende Anleihen mit Nominalwert von jeweils 100 Euro sind verfügbar:

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8
Preis	102,20	98,75	100,10	95,90	89,70	85,20	83,70	90,80
Coupon (jährlich)	5,625	4,35	4,75	5,25	4,00	5,00	5,25	5,75
Laufzeit (in Jahren)	1	2	2	3	3	4	5	5

Anleihe	9	10	11	12	13	14	15	16
Preis	107,30	105,40	107,90	105,10	102,60	97,10	102,80	90,60
Coupon	6,875	6,5	6,625	6,125	5,625	4,75	5,5	4,5
Laufzeit	6	6	7	7	8	8	9	9

(a) Formulieren Sie ein lineares Programm (LP), das die Kosten des zweckbestimmten Portfolios minimiert und lösen Sie das LP mit einem Solver ihrer Wahl.

(b) Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für das „dedicated portfolio“ durch. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Angenommen die Verpflichtungen im dritten Jahr betragen 28×10^6 Euro. Um wie wieviel erhöhen sich die Kosten des zweckgebundenen Portfolios?

(ii) Gibt es Anleihen, die im optimalen Portfolio nicht vorhanden sind? Um wie viel sollte der Preis dieser Anleihen jeweils fallen, sodass sie im optimalen Portfolio aufgenommen werden?

(iii) Der Manager des Fonds möchte unbedingt 10000 Stück der dritten Anleihe in das zweckgebundene Portfolio aufnehmen. Welche Extrakosten verursacht eine entsprechende Entscheidung des Managements?

(iv) Würden Sie vermuten, dass gewisse Anleihen schlecht bepreist wurden? Welche? Warum?

(v) Unter welchen Bedingungen bzgl. Zinssatz am Geldmarkt sollte das optimale Portfolio eine Bargeldposition beziehen?

3. Eine Gemeinde muss folgende Verpflichtungen in den folgenden 8 Jahren berücksichtigen.

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8
Verplfichtungen	11000	19000	21000	19000	18000	13000	14000	8000

Diese Verpflichtungen möchte sie mit Hilfe eines *zweckgebundenen Portfolios*[1] über folgende Anleihen mit Nominale jeweils 100 Euro, die zum aktuellen Zeitpunkt ($T_0 = 0$) zur Verfügung stehen, bedienen.

Anleihe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis	101	100	102	99	97	104	101	102	103	98
Coupon (jährlich)	4,5	4	5	3,8	4	8,5	6,5	8	8,5	7
Laufzeit	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8

(a) Bestimmen Sie ein zweckgebundenes Portfolio mit minimalen Kosten, das zum Zeitpunkt T_0 zusammengestellt und in den folgenden 8 Jahren nicht umgeschichtet wird.

(b) Führen Sie unter Verwendung eines Solvers ihrer Wahl eine Sensitivitätsanalyse für dieses Problem durch.

(i) Interpretieren Sie die *Schattenpreise* in Jahr t ($t = 1, 2, \ldots, 8$).

(ii) Interpretieren Sie die *reduzierten Kosten* von Anleihe i ($i = 1, 2, \ldots, 10$).

(iii) Interpretieren Sie die reduzierten Kosten der (eventuellen) Überschussvariablen z_t, ($t = 0, 1, \ldots, 7$).

4. (a) Berechnen Sie den Preis einer binären Call Option („digital call option“) mit Strikepreis 50 Euro und Fällingkeit T über ein Underlying XYZ, in Abhängigkeit des heutigen Preis S_0 des Underlyings XYZ, des Zinssatzes $r > 0$, und unter Berücksichtigung zweier Szenarien „up“ and „down“ für die Preisentwicklung des Basiswertes, in denen der Preis von XYZ zum Zeitpunkt T als $u \cdot S_0$ bzw. $d \cdot S_0$ gegeben ist, $d < 1 + r =: R < u$. Eine solche Call Option zahlt 1 Euro zurück, wenn zum Zeitpunkt T der Preis von XYZ den Ausübungspreis von 50 Euro überschreitet. Wenn der Preis von XYZ zum Zeitpunkt T unter 50 Euro fällt, dann zahlt die binäre Call Option nichts zurück.

[1] Das Konzept eines *zweckgebundenen Portfolios* wurde in Übungsbeispiel 2 erklärt

(b) Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise zweier Europäischen Call Optionen mit Ausübungspreisen 50 bzw. 40 Euro über XYZ seien 10 bzw. 13 Euro. Weiters nehmen wir an, dass diese Preise keine Arbitrage zulassen. Bestimmen Sie den fairen Preis einer Europäischen Put Option mit Ausübungspreis 40 Euro über XYZ.

(c) Der aktuelle Preis des Underlyings XYZ betrage $S_0 = 40$ Euro. An Ende der nächsten Periode wird der Preis von XYZ entweder $S_0 \cdot u$ oder $S_0 \cdot d$ betragen, wobei $d < 1 < u$ gilt aber d und u unbekannt sind. Der Zinssatz sei 0. Die aktuellen Preise Europäischer Call Optionen mit Ausübungspreisen 30, 40, 50 und 60 Euro über XYZ seien 10, 7, 10/3 bzw. 0 Euro. Ziegen Sie, dass diese Preise eine Arbitrage-Möglichkeit ermöglichen. Um welche Art von Arbitrage handelt es sich hier? Welcher dieser Preise wurde falsch berechnet? Begründung?

(d) Bestehend aus den Europäischen Call Optionen in c) konstruieren Sie ein Portfolio, das Typ A Arbitrage erlaubt.

5. **Arbitrage im Devisenmarkt.**
Betrachten Sie die Wechselkurse zwischen den vier Währungen USD, EUR, JPY und GBP:

	USD	EUR	GBP	JPY
USD	1	0,73791	0,66047	90,68400
EUR	1,35518	1	0,89505	122,87581
GBP	1,51408	1,11725	1	137,30284
JPY	0,01103	0,00814	0,00728	1

Ein Devisenmarkt heißt *arbitragefrei*, wenn es keine Möglichkleit gibt nur durch Devisenwechsel einen Gewinn zu machen. Geben Sie ein lineares Programm an, durch die Lösung dessen erkannt werden kann, ob das obige Devisenmarkt (bestehend aus den obigen vier Währungen) arbitragefrei ist. Lösen Sie dieses lineare Programm und bestimmen Sie ob die obigenWechselkurse eine Arbitragemöglichkeit zulassen[2].

6. Angenommen einem Investor steht aktuell ein Budget von $B = 20000$ (Euro) zur Verfügung. Aktuell kostet die Aktie XYZ 20 Euro pro Stück und eine Europäische Call Option, 100 Stück dieser Aktie um 15 Euro in genau sechs Monaten von heute zu kaufen, kostet 1000 Euro. Es wird angenommen, dass der Investor zinsfrei zusätzliches Kapital beschaffen kann, um es unverzüglich in den Verkauf von Call Optionen mit den obigen Charakteristika zu investieren. Dabei darf die Anzahl der gekauften bzw. verkauften Call Optionen 50 nicht überschreiten. Weiters kann eine sechs-monatige risikolose Null-Coupon-Anleihe mit Nominale 100 zum aktuellen Zeitpunkt um 90 Euro gekauft werden. (Das ist ein Kontrakt, der in sechs Monaten 100 Euro auszahlt und heute um 90 Euro gekauft wird). Betrachten Sie drei aus heutiger Sicht gleichwahrscheinliche Szenarien für die Preisentwicklung der Aktie XYZ: der Preis ändert sich nicht, der Preis steigt auf 40 Euro, der Preis fällt auf 12 Euro.

(a) Formulieren und lösen Sie ein lineares Program um ein Portfolio bestehend aus Aktien, Anleihen und Optionen zu bestimmen, das den erwarteten Gewinn maximiert.

(b) Angenommen der Investor möchte mindestens 2000 in jedem Preisentwicklungsszenario gewinnen. Formulieren und lösen Sie ein lineares Programm, das den erwarteten Gewinn unter dieser zusätzlichen Restriktion maximiert. Vergleichen Sie die erwarteten Gewinne in (a) und (b).

(c) Der *risikoloser Gewinn* wird als größtmöglicher Gewinn des Portfolios, das in jedem Preisentwicklungsszenario realisiert wird, definiert. Bestimmen Sie eine Portfoliozusammensetzung, die den risikolosen Gewinn für die oben genannten drei Szenarien maximiert.

[2] Es ist durchaus möglich, dass unterschiedliche Solver aufgrund unterschiedlicher nummerischer Genauigkeit unterschiedliche Ergebnisse liefern!