Skriptum

Operations Research

verfasst nach der Vorlesung von

Frau Prof. Dragoti-Cela

im Wintersemester 2011/2012 von

Judith Kloas

Institut für Optimierung und Diskrete Mathematik

Graz University of Technology

Techische Universität Graz

Inhaltsverzeichnis

1 Dynamische Optimierung **3**

1.1 Einführende Beispiele . . . 3

1.2 Das endlich-stufige deterministische dynamische Optimierungsproblem-ESDDOP . . . 5

1.3 Das endlich-stufige stochastische dynamische Optimierungsproblem-ESSDOP . . . 9

1.3.1 Die Optimalitätsgleichung . . . 11

1.3.2 Ein Kontrollmodell . . . 15

1.4 ESDDOP mit nicht diskretem Zustands- bzw. Aktionenraum . . . 21

1.4.1 Lösbarkeit von (D) und Eindeutigkeit der Lösung . . . 22

1.5 Das unendlich-stufige deterministische dynamische Optimierungsproblem . . . 24

1.5.1 Lösungsverfahren für das Problem (U): Wertiteration vs. Politikiteration . . . 27

2 Lagerhaltungsprobleme **29**

2.1 Das grundlegende Lagerhaltungsmodell . . . 30

2.2 Ein deterministisches dynamisches Lagerhaltungsmodell . . . 35

2.3 Ein serielles zweistufiges Lagersystem . . . 40

2.4 Mehrstufige Lagersysteme . . . 43

2.5 Ein stochastisches Ein-Periodenmodell . . . 49

2.6 Stochastische stationäre Mehrperiodenmodelle . . . 54

2.7 Unendlich-periodische stochastische stationäre Lagerhaltungsprobleme . . . 57

3 Multikriterielle Optimierung **60**

3.1 Einleitung und Definitionen . . . 60

3.2 Schwache und strikte pareto-optimale Lösungen . . . 67

3.3 Eigentliche Pareto-Optimialität und eigentliche Effizienz . . . 68

3.4 Die Skalarisierungsmethode . . . 72

3.4.1 Die Skalarisierung und die schwache Effizienz . . . 74

3.4.2 Die Skalarisierung und die eigentliche Pareto-Optimalität . . . 76

3.5 Andere Methoden der Pareto-Optimierung . . . 77

3.5.1 Die ε-Constraint-Methode . . . 77

3.5.2 Methode von Benson . . . 79

3.5.3 Methode des Compromise Programming (CP) . . . 82

3.6 Multikriterielle lineare Optimierung . . . 88

3.6.1 Parametrische lineare Optimierung . . . 90

3.6.2 Theorie der MCLP . . . 93

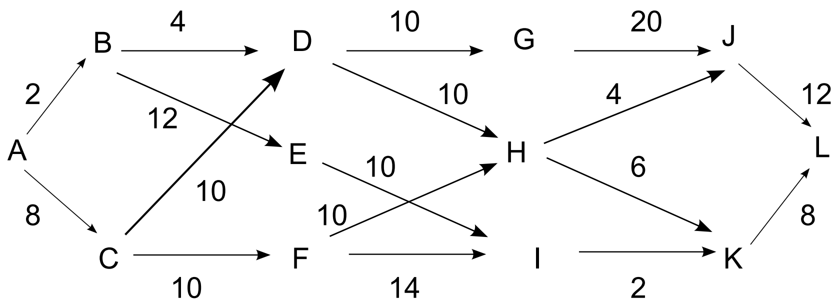
3.6.3 Ein multikriterieller Simplex-Algorithmus . . . 94

Kapitel 1

Dynamische Optimierung

1.1 Einführende Beispiele

Beispiel (Kürzeste Wegeproblem: Stufengraph)**.** Sei $v_n(s)$ die Länge eines kürzesten Weges vom Knoten s der Stufe n nach L.



Stufen: $0 : \{A\}, 1 : \{B, C\}, 2 : \{D, E, F\}, 3 : \{G, H, I\}, 4 : \{J, K\}, 5 : \{L\}$

$$\begin{aligned}
v_4(J) &= 12 \\
v_4(K) &= 8 \\
v_3(G) &= 20 + v_4(J) = 32 \\
v_3(H) &= \min\{4 + v_4(J), 6 + v_4(K)\} = 14 \\
v_3(I) &= 2 + v_4(K) = 10 \\
v_2(D) &= \min\{10 + v_3(G), 14 + v_3(H)\} = 24 \\
v_2(E) &= 10 + v_3(I) = 20 \\
v_2(F) &= \min\{10 + v_3(H), 14 + v_3(I)\} = 24 \\
v_1(B) &= \min\{4 + v_2(D), 12 + v_2(E)\} = 28 \\
v_1(C) &= \min\{10 + v_2(D), 10 + v_2(F)\} = 34 \\
v_0(A) &= \min\{2 + v_1(B), 8 + v_1(C)\} = 30
\end{aligned}$$

Kürzester Weg: A-B-D-H-K-L

Es handelt sich hier um ein mehrstufiges Optimierungsproblem, bei dem jedes Teilproblem in jeder Stufe separat optimiert werden kann. Die Lösung (optimaler Wert) des Gesamtproblems setzt sich aus den Lösungen (optimalen Werten) der Probleme in den einzelnen Stufen zusammen.

Beispiel (Aufteilungsproblem)**.** Man betrachtet einen Investor mit 30 Geldeinheiten und sucht ein Investitionsmodell, dass den Gesamtgewinn maximiert.

Stufe	Projekt	Budget	Gewinn
0	1	12	7
1	2	6	4
2	3	21	10
3	4	8	5

Stufe i: Entscheidung, ob Projekt $i+1$ erworben wird ($i = 0, \dots, 3$).
Sei $v_n(s)$ der maximale Gewinn, der mit den Projekten $n+1, \dots, 4$ und Restkapital s zu erzielen ist.

Stufe 3: $v_3(s) = \begin{cases} 0 & s < 8 \\ 5 & s \geq 8 \end{cases}$

Stufe 2: $v_2(s) = \begin{cases} v_3(s) & s < 21 \\ \max\{10 + v_3(s-21), v_3(s)\} & s \geq 21 \end{cases}$

Stufe 1: $v_1(s) = \begin{cases} v_2(s) & s < 6 \\ \max\{4 + v_2(s-6), v_2(s)\} & s \geq 6 \end{cases}$

Stufe 0: $v_0(s) = \begin{cases} v_1(s) & s < 12 \\ \max\{7 + v_1(s-12), v_1(s)\} & s \geq 12 \end{cases}$

s	$v_3(s)$	$v_2(s)$	$v_1(s)$	$v_0(s)$
$0 \leq s \leq 5$	0	0	0	0
$6 \leq s \leq 7$	0	0	4	4
$8 \leq s \leq 11$	5	5	5	5
$12 \leq s \leq 13$	5	5	5	7
$14 \leq s \leq 17$	5	5	9	9
$18 \leq s \leq 19$	5	5	9	11
$20 \leq s \leq 20$	5	5	9	12
$21 \leq s \leq 25$	5	10	10	12
$26 \leq s \leq 26$	5	10	10	16
$27 \leq s \leq 28$	5	10	14	16
$29 \leq s \leq 30$	5	5	15	16

Welche Projekte werden ausgeführt?
$v_0(30) = \max\{7 + v_1(18), v_1(30)\} = \max\{16, 15\} = 16$
$v_1(18) = \max\{4 + v_2(12), v_2(18)\} = \max\{9, 5\} = 9$
$v_2(12) = v_3(12)$
$v_3(12) = 5$
$\Rightarrow$ Führe die Projekte 1, 2 und 4 aus.

Beispiel (Stochastische dynamische Optimierung, Stopp-Problem)**.** Ein Hausbesitzer muss ein Haus binnen 10 Wochen verkaufen und er inseriert jede Woche in der Zeitung. Jede Woche wird entschieden, ob er verkaufen oder noch abwarten soll. Das Angebot in der Woche n sei x_n, $x_n \in S = \{300, 350, 400, 450\}$ in Tausend Euro. Des weiteren sei $q(x_n)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der das Angebot x_n gemacht wird.

x_n	300	350	400	450
$q(x_n)$	0.2	0.3	0.4	0.1

Vorgangsweise: Akzeptiere ein Angebot x_n in Woche n nur dann, wenn der zu erwartende Erlös über die zukünftigen Wochen niedriger als das vorliegende Angebot ist (oder gleich). Dabei ist $v_n(s)$ der maximal zu erwartende Verkaufserlös, wenn in Woche n ein Angebot der Höhe s gemacht wird, wobei $n = 0, \dots, 10$.

$$\begin{aligned} v_{10}(s) &= 0 \\ v_9(s) &= s \quad \forall s \ \text{(auf jeden Fall annehmen)} \\ v_n(s) &= \max\left\{ s, \sum_{s \in S} q(s) v_{n+1}(s) \right\} \qquad 0 \le n \le 9 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die nachstehende Tabelle, wobei Angebote, die akzeptiert werden mit einem Stern versehen sind.

	300	350	400	450
$v_9(s)$	300*	350*	400*	450*
$v_8(s)$	370	370	400*	450*
$v_7(s)$	390	390	400*	450*
$v_6(s)$	400	400	400*	450*
$v_5(s)$	405	405	405	450*
$v_4(s)$	409.5	409.5	409.5	450*
$v_3(s)$	413.5	413.5	413.5	450*
$v_2(s)$	417.2	417.2	417.2	450*
$v_1(s)$	420.5	420.5	420.5	450*
$v_0(s)$	423.4	423.4	423.4	450*

1.2 Das endlich-stufige deterministische dynamische Optimierungsproblem-ESDDOP

Definition 1.2.1. Das ESDDOP ist ein Tupel der Form $(N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, z, r, v_N)$, wobei

(i) $N \in \mathbb{N}$ ... die Länge des Planungshorizonts (legt Anzahl der Stufen fest),

(ii) $\mathcal{S}$... der Zustandsraum, abzählbare Menge: die nichtleere Teilmenge $S_i \in \mathcal{S}$ stellt die Zustandsmenge der Stufe i dar, $S_0 = \{s_0\}$,

(iii) $\mathcal{A}$ ... der Aktionenraum, abzählbare Menge, sodass $A_n(s) \in \mathcal{A}$, nicht leer und endlich, die Menge der Aktionen/Entscheidungen ist, die in Stufe n bei Zustand s getroffen werden dürfen $D_n := \{(s, a) \in S_n \times \mathcal{A} : a \in A_n(s)\}$,

(iv) $z_n : D_n \to S_{n+1}$ ... die Zustandstransformations-Funktion, $\forall s \in S_n, \forall a \in A_n(s)$ sei $z(s,a) = s' \in S_{n+1}$,

(v) $r_n : D_n \to \mathbb{R}$ ... die einstufige Gewinnfunktion, ist die Funktion, die den Gewinn $r_n(s,a)$ in Zustand s der n-ten Stufe bei Aktion a angibt und

(vi) $v_N : S_N \to \mathbb{R}$ ... die terminale Gewinnfunktion, beschreibt den Gewinn $v_N(s)$, der bei Zustand $s \in S_N$ eintritt.

Definition 1.2.2. Eine Strategie (Politik) $\delta = (a_0, \dots, a_{N-1})$ ist eine Folge zulässiger Aktionen $a_0 \in A_0(s_0), \dots, a_{N-1} \in A_{N-1}(s_{N-1})$, wobei $s_{n+1} = z_n(s_n, a_n)$ $\forall n = 0, \dots, N-1$ ist. Die Menge aller Strategien ist Δ. Wir haben dabei das Ziel, diejenige Strategie zu finden, welche den Gesamtgewinn maximiert.

Notationen. Es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

- $R_\delta(s_0) = \sum_{n=0}^{N-1} r_n(s_n, a_n) + v_N(s_N)$,
- $v_0(s_0) = \max\{R_\delta(s_0) : \delta \in \Delta\}$ und
- für $n = N-1, \dots, 1$:

$$v_n(s_n) = \max_{a_n \in A_n(s_N)} \left\{ \sum_{t=n}^{N-1} r_t(s_t, a_t) + v_N(s_N) \right\}.$$

Satz 1.2.3. Optimalitätsgleichung:

(i) Für $n = 0, \dots, N-1$ und für alle $s_n \in S_n$ gilt

$$v_n(s_n) = \max_{a \in A_n(s_n)} \{r_n(s_n, a) + v_{n+1}(z_n(s_n, a))\}. \tag{1.1}$$

(ii) Sei

$$a_n^* \in \arg\max_{a \in A_n(s_n)} \{r_n(s_n, a) + v_{n+1}(z_n(s_n, a))\} \quad \forall n = 0, \dots, N-1,$$

dann ist $\delta = (a_0^*, \dots, a_{N-1}^*)$ eine optimale Strategie für das gegebene ESDDOP.

Beweis: (i): Sei $n \in \{0, \dots N-1\}, s_n \in S_n$. Da $A_n(s_n)$ endlich ist (laut Problemdefinition) existieren die Maxima. Endlich viele Stufen $\Rightarrow N$ endlich $\Rightarrow$ es existiert eine optimale Strategie. Sei $a_n^*, \dots a_{N-1}^*$ eine optimale Strategie, sei $s_n^*, s_{n+1}^*, \dots s_N^*$ die dazugehörige optimale Zustandsfolge, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} v_n(s_n) &= \sum_{t=n}^{N-1} r_t(s_t^*, a_t^*) + v_N(s_N^*) \\ &= r_n(s_n^*, a_n^*) + \underbrace{\sum_{t=n+1}^{N-1} r_t(s_t^*, a_t^*) + v_N(s_N^*)}_{=v_{n+1}(s_{n+1})} \\ &\leq r_n(s_n^*, a_n^*) + v_{n+1}(s_{n+1}^*). \end{aligned}$$

Somit ist

$$v_n(s_n) \leq \max_{a \in A_n(s_n)} \{r_n(s_n, a) + v_{n+1}(z_n(s_n, a))\}.$$

Sei nun a_n^+ eine Aktion im Zustand $s_n^+ = s_n$, die die rechte Seite von der Gleichung in 1.1 maximiert. Sei $a_{n+1}^+, \dots a_{N-1}^+$ eine optimale Aktionsfolge für den Anfangszustand $s_{n+1}^+ := z_n(s_n^+, a_n^+)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
v_n(s_n) &\geq \sum_{t=n}^{N-1} r_t(s_t^+, a_t^+) + v_N(s_N^+) \\
&= r_n(s_n^+, a_n^+) + \sum_{t=n+1}^{N-1} r_t(s_t^+, a_t^+) + v_N(s_N^+) \\
&= r_n(s_n^+, a_n^+) + v_{n+1}(s_{n+1}^+) \\
&= \max_{a \in A_n(s_n)} \{r_n(s_n, a) + v_{n+1}(z_n(s_n, a))\}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit

$$v_n(s_n) = \max_{a \in A_n(s_n)} \{r_n(s_n, a) + v_{n+1}(z_n(s_n, a))\}.$$

(ii): Summiere die Gleichung aus 1.1 für $n = 0, \dots N-1$ auf und kürze anschließend

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} v_n(s_n) &= \sum_{n=0}^{N-1} r_n(s_n, a_n^*) + \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1}(\underbrace{z_n(s_n, a_n^*)}_{s_{n+1}}) \\
v_0(s_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} r_n(s_n, a_n^*) + v_N(s_N) \\
&= \max_{\delta \in \Delta} R_\delta(s_0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_0^*, \dots a_{N-1}^*$ optimal.

□

Algorithmus. Wertiteration des ESDDOP
Input: Ein ESDDOP $(N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, z, r, v)$.
Begin: Setze $v'(s) = v_N(s)\ \forall s \in S_N$.
for $n = N-1$ downto 0 do
Setze $v(s) = v'(s)\ \forall s \in S_{n+1}$.
$\forall s \in S_n$ berechne

$$v'(s) = \max_{a \in A_n(s)} \{r_n(s, a) + v(z_n(s, a))\} \text{ und}$$

$$f_n^* := a^* \in \arg\max_{a \in A_n(s)} \{r_n(s, a) + v(z_n(s, a))\}.$$

End
Setze $v_0(s_0) = v'(s_0)$.
Setze $\delta^* = (a_0^*, \dots a_{N-1}^*)$ mit $a_0^* = f_0^*(s_0)$ und $a_n^* = f_n^*(s_n)\ \forall n = 1, \dots N-1$,
wobei $s_n = z_{n-1}(s_{n-1}, a_{n-1})$.

Bemerkungen. Für den Algorithmus gilt folgendes:

- Er benötigt viel Speicher: $f_n^*(s)$ muss für jedes n und s mitgeführt werden (aber nur 2 Werte für v).
- Er ist exakt, effizient (für alle n), abhängig von Maximabildung.
- Das Verfahren funktioniert generell für seperable Gewinnfunktionen.

Definition 1.2.4. Eine Folge von Wertfunktionen $v_0, \ldots v_N$ heißt seperabel, wenn es Funktionen $F_0, \ldots F_{N-1}$ gibt, sodass gilt

$$v_n(s) = \max_{a \in A_n(s)} \{F_n(r_n(s,a), v_{n+1}(z(s,a)))\},$$
$$\max_{x,y} F_n(x,y) = \max_x \max_y F_n(x,y).$$

Beispiel. (Subset Sum Problem)
Input: $N \in \mathbb{N}, P_1, \ldots P_N \in \mathbb{Z}^+, Y \in \mathbb{Z}^+$
Frage: $\exists I \subseteq \{1, \ldots N\}$, sodass $\sum_{i \in I} P_i = Y$?
Formuliere Instanz des ESDDOP:

- Horizont der Länge N,
- Stufen: $1, \ldots N$,
- Menge der zulässigen Zustände: $\mathcal{S} = \{0, \ldots Y\}$,
- alle zulässigen Zustände für Stufe n: $S_n = \mathcal{S}\ \forall n = 0, \ldots N$,
- $\mathcal{A} = \{0,1\}, A_n(s) = \begin{cases} \{0\} & s < P_{N-n+1} \\ \{0,1\} & s \geq P_{N-n+1} \end{cases},$
- Übergangsfunktionen: $z_n(s,a) = s - a \cdot P_{N-n+1}$,
- einstufige Gewinnfunktion: $r_n(s,a) = \begin{cases} 1 & s = P_{N-n+1}, a = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$
- terminale Gewinnfunktion: $v_n(s) = \max_{a \in A_n(s)} \{\max\{r_n(s,a), v_{n+1}(z_n(s,a))\}\}$

Behauptung: $v_1(Y) = \begin{cases} 1 & \text{(Antwort ja für Subset Sum)} \\ 0 & \text{(Antwort nein für Subset Sum)} \end{cases}$
Beweis:
$v_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad I \subseteq \{1, \ldots N-n+1\} \text{mit} \sum_{i \in I} P_i = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
mit

$$\sum_{i \in I} P_i = s \quad \forall n = 0, \ldots N, \forall s \in \mathcal{S}$$

ist zu zeigen.
$v_N(s) = \begin{cases} 1 & s = P_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Angenommen man will wissen, ob es ein $I \subseteq \{1, \ldots n\}$ gibt mit $\sum_{i \in I} P_i = s$, dann gibt es zwei Möglichkeiten.

$n \in I$	$n \notin I$
(1) $I = \{n\} \Rightarrow P_n = s$ (2) $I = \{n\} \cup J, J \subseteq \{1, \dots n-1\}$ $s = \sum_{i \in I} P_i = P_n + \sum_{i \in J} P_i$ $\Rightarrow \sum_{i \in I} P_i = s - P_n$	$I \subseteq \{1, \dots n-1\}$ $\sum_{i \in I} P_i = s$

Betrachte Gleichung für $v_n(s)$:
Fall 1:

$$\begin{aligned} s &< P_{N-n+1} \quad \text{(kann } P_{N-n+1} \text{ nicht nehmen)} \\ A_n(s) &= \{0\} \\ v_n(s) &= \max \left\{ \underbrace{r_n(s,0)}_{=0}, v_{n+1}(\underbrace{z_n(s,0)}_{=s}) \right\} = v_{n+1}(s) \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} s &> P_{N-n+1} \quad \text{(könnte } P_{N-n+1} \text{ nehmen)} \\ A_n(s) &= \{0,1\} \\ v_n(s) &= \max \left\{ \max \left\{ \underbrace{r_n(s,0)}_{=0}, v_{n+1}(\underbrace{z_n(s,0)}_{=s}) \right\}, \max \left\{ \underbrace{r_n(s,1)}_{=0}, v_{n+1}(\underbrace{z_n(s,1)}_{=s-P_{N-n+1}}) \right\} \right\} \\ &= \max \left\{ v_{n+1}(s), v_{n+1}(s - P_{N-n+1)} \right\} \end{aligned}$$

Fall 3:

$$\begin{aligned} s &= P_{N-n+1} \quad \text{(könnte } P_{N-n+1} \text{ nehmen)} \\ A_n(s) &= \{0,1\} \\ v_n(s) &= \max \left\{ v_{n+1}(s), 1, v_{n+1}(s - P_{N-n+1)} \right\} = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Wir haben gesehen, dass man mit dynamischer Optimierung auch Entscheidungsprobleme lösen kann.

1.3 Das endlich-stufige stochastische dynamische Optimierungsproblem-ESSDOP

Bisher: $s_n \in S_n$ - Zustand Stufe n
$a_n \in A_n(s_n)$ - Aktion in Stufe n
$\Rightarrow$ deterministisch, $s_{n+1} = z_n(s_n, a_n)$

Realistischer: Zustand s_{n+1} ergibt sich als Realisierung einer Zufallsvariable I_n, die von s_n und a_n abhängt. Sei $p(s_n, a_n, s_{n+1})$ die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Zustand s_{n+1} in Stufe $n+1$ nach Zustand s_n in Stufe n und Aktion a_n.
$\sum_{s_{n+1} \in S_{n+1}} p(s_n, a_n, s_{n+1}) = 1$

Definition 1.3.1. Ein endlich-stufiges stochastisches dynamisches Optimierungsproblem ist ein Tupel $(N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, r_n, p, v_N)$, wobei $N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, r_n, v_n$ wie in ESDDOP und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind wie oben definiert.

Ziel: Maximierung des Gesamtgewinns (Zufallsvariable).

Definition 1.3.2. Eine Funktion $f_n : S_n \to A_n$ mit $f_n(s) \in A_n(s)\ \forall s \in S_n$ heißt Entscheidungsfunktion. Eine Folge $(f_0, f_1, \dots f_{N-1})$ von Entscheidungsfunktionen heißt Strategie (Politik). Die Menge aller Strategien sei Δ.

Bemerkung. Hat man $s_0 \in S_0$, eine Strategie $\delta = (f_0, f_1, \dots f_{N-1}) \in \Delta$ und eine Realisierung von Zuständen $s_1, \dots s_N$ in den jeweiligen Stufen gegeben, so ist der Gesamtgewinn

$$R_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N) = \sum_{i=0}^{N-1} r_i(s_i, a_i) + v_N(s_N)$$
$$R_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) = \sum_{i=n}^{N-1} r_i(s_i, a_i) + v_N(s_N). \tag{1.2}$$

Der Gesamtgewinn $R_{s_0,\delta}$ ist eine Zufallsvariable mit den Realisierungen
$R_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N)$, $\forall (s_1, \dots s_N) \in S_1 \times \dots \times S_N$.
Mit der Annahme, dass die $I_1, \dots I_{N-1}$ unabhängig sind, folgt für die Wahrscheinlichkeit der Realisierungen $R_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N)$

$$P_{s_0,\delta}(I_1 = s_1, \dots I_N = s_N) =: P_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N) = \prod_{i=0}^{N-1} p_i(s_i, f_i(s_i), s_{i+1}) \text{ bzw.}$$
$$P_{s_n,\delta}(I_{n+1} = s_{n+1}, \dots I_N = s_N) =: P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) = \prod_{i=n}^{N-1} p_i(s_i, f_i(s_i), s_{i+1}).$$

Definition 1.3.3. Erwartungswert:

$$E(R_{s_0,\delta}) = \sum_{s_1 \in S_1, \dots s_N \in S_N} R_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N) \cdot P_{s_0,\delta}(s_1, \dots s_N)$$

Definition 1.3.4. Die Strategie δ^* heißt optimal, falls

$$\bar{R}_{s_0,\delta^*} := E(R_{s_0,\delta^*}) \geq E(R_{s_0,\delta}) \quad \forall \delta \in \Delta.$$

Maximaler erwarteter Gewinn: $v_0(s_0) := \sup_{\delta \in \Delta} \left\{ \bar{R}_{s_0,\delta} \right\}$

Notationen.

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{s_n,\delta} &= \sum_{s_{n+1} \in S_{n+1}, \dots s_N \in S_N} R_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \cdot P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \\
&= \sum_{s_{n+1} \in S_{n+1}} \dots \sum_{s_N \in S_N} R_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \cdot \prod_{k=n}^{N-1} p(s_k, f_k(s_k), s_{k+1}) \\
v_n(s) &:= \sup_{\delta \in \Delta} \left\{ \bar{R}_{s_n,\delta} \right\} \quad \forall n = 0, \dots N-1
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Es gilt für alle $n = 0, \dots N-1, \forall \delta \in \Delta, \forall s_n \in S_n$, dass

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{s_n,\delta} &= \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} R_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \cdot P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \\
&\overset{1.2}{=} \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} \left(r_n(s_n, f_n(s)) + \sum_{i=n+1}^{N-1} r_i(s_i, f_i(s_i)) + v_N(s_N)\right) \cdot P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \\
&= \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} \left(r_n(s_n, f_n(s)) + R_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N)\right) \cdot P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \\
&= r_n(s_n, f_n(s)) \cdot \underbrace{\sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N)}_{=1} \\
&\quad + \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} R_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N) \cdot P_{s_n,\delta}(s_{n+1}, \dots s_N) \\
&= r_n(s_n, f_n(s)) + \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} p(s_n, f_n(s_n), s_{n+1}) R_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N) \\
&\quad \cdot P_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N) \\
&= r_n(s_n, f_n(s)) + \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} p(s_n, f_n(s_n), s_{n+1}) \sum_{s_{n+2}\in S_{n+2}} \cdots \sum_{s_N \in S_N} R_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N) \\
&\quad \cdot P_{s_{n+1},\delta}(s_{n+2}, \dots s_N) \\
\bar{R}_{s_n,\delta} &= r_n(s_n, f_n(s)) + \sum_{s_{n+1}\in S_{n+1}} p(s_n, f_n(s_n), s_{n+1}) \bar{R}_{s_{n+1},\delta}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Falls $\mathcal{S}$ endlich ist, existieren alle obigen Erwartungswerte. Ansonsten müssten Annahmen getroffen werden, z.B. hinreichende Bedingungen für die Existenz aller $R_{s_n,\sigma}$: $\exists b : \mathcal{S} \to (0, \infty), \exists 0 < \alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned}
| r_n(s, f_n(s)) | &\le b(s) \quad \forall (s, f_n(s)) \in D_n \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1 \\
| v_N(s) | &\le b(s) \quad \forall s \in S_N \\
\sum_{s' \in S_{n+1}} p_n(s, f_n(s), s') b(s') &\le \alpha b(s) \quad \forall (s, f_n(s)) \in D_n, \forall n = 0, \dots N-1.
\end{aligned}$$

Unter diesen Bedingungen gilt:

$$| \bar{R}_{s,\delta} | \le \sum_{i=0}^{N-n} \alpha^i b(s_n) < \infty \quad \forall s_n \in S_n, \forall n \in \mathbb{N}, n < N, \forall \delta \in \Delta.$$

Dies kann induktiv mit Hilfe von 1.4 gezeigt werden.

1.3.1 Die Optimalitätsgleichung

Satz 1.3.5. Es gilt:

(i) Für $n = 0, \cdots N-1$ und $s \in S_n$ ist

$$v_n(s) = \max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s, a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s, a, s') v_{n+1}(s') \right\}. \qquad (1.5)$$

(ii) Jede Strategie, die sich aus dem argmax der Gleichung 1.5 ergibt, ist optimal.

Beweis: (i) Sei $n = N - 1$. Aus 1.3 und 1.4 ergibt sich, dass für alle $s \in S_{N-1}$ gilt

$$\begin{aligned} v_{N-1}(s) &= \sup_{\delta\in\Delta} \left\{\bar{R}_{s_{N-1}=s,\delta}\right\} \\ &\overset{1.4}{=} \max_{a\in A_{N-1}(s)} \left\{ r_{N-1}(s,a) + \sum_{s'\in S_N} p(s,a,s')v_N(s') \right\}. \end{aligned}$$

Sei $f^*_{N-1} \in \arg\max_{a\in A_{N-1}(s)} \left\{ r_{N-1}(s,a) + \sum_{s'\in S_N} p(s,a,s')v_N(s') \right\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} v_{N-1}(s) &= r_{N-1}(s, f^*_{N-1}(s)) + \sum_{s'\in S_N} p(s, f^*_{N-1}(s), s')v_N(s') \\ &= R_{s_{N-1}=s,\delta^*} \end{aligned}$$

für alle Strategien $\delta^* = (f_0, \cdots f_{N-2}, f^*_{N-1})$.
Somit ist auch (ii) für $n = N - 1$ gezeigt. Sei nun $n = N - 2$. Aus 1.3 und 1.4 folgt

$$\begin{aligned} v_{N-2}(s) &= \sup_{\delta\in\Delta} \left\{\bar{R}_{s_{N-2}=s,\delta}\right\} \\ &\overset{1.4}{=} \sup_{\delta\in\Delta} \left\{ r_{N-2}(s, f_{N-2}(s)) + \sum_{s'\in S_{N-1}} p(s, f_{N-2}(s), s')\bar{R}_{s_{N-1}=s',\delta} \right\} \\ &\le \sup_{\delta\in\Delta} \left\{ r_{N-2}(s, f_{N-2}(s)) + \sum_{s'\in S_{N-1}} p(s, f_{N-2}(s), s')v_{N-1}(s') \right\} \\ &= \max_{a\in A_{n-2}(s)} \left\{ r_{N-2}(s,a) + \sum_{s'\in S_{N-1}} p(s,a,s')v_{N-1}(s') \right\}, \end{aligned}$$

und dies geht induktiv weiter. Somit folgt insgesamt

$$v_n(s) \le \max_{a\in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{s'\in S_{n+1}} p(s,a,s')v_{n+1}(s') \right\}. \tag{1.6}$$

Sei

$$f^*_{N-2} \in \arg\max_{a\in A_{n-2}(s)} \left\{ r_{N-2}(s,a) + \sum_{s'\in S_{N-1}} p(s,a,s')v_{N-1}(s') \right\},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} v_{N-2}(s) &\le r_{N-2}(s, f^*_{N-2}(s)) + \sum_{s'\in S_{N-1}} p(s, f^*_{N-2}(s), s')v_{N-1}(s') \\ &= \bar{R}_{s_{N-2}=s,\delta^*} \quad \forall\delta^* = (f_0, \cdots f_{N-3}, f^*_{N-2}, f^*_{N-1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Aus 1.3, 1.4 und 1.7 folgt

$$\begin{aligned} v_{N-2}(s) &\overset{1.3}{=} \sup_{\delta \in \Delta} \left\{ \bar{R}_{s_{N-2}=s,\delta} \right\} \\ &\geq \bar{R}_{s_{N-2}=s,\delta^*} \\ &\overset{1.7}{=} r_{N-2}(s, f^*_{N-2}(s)) + \sum_{s' \in S_{N-1}} p(s, f^*_{N-2}(s), s') v_{N-1}(s') \\ &= \max_{a \in A_{N-2}(s)} \left\{ r_{N-2}(s,a) + \sum_{s' \in S_{N-1}} p(s,a,s') v_{N-1}(s') \right\}, \end{aligned}$$

also

$$v_n(s) \geq \max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') v_{n+1}(s') \right\}. \tag{1.8}$$

Aus 1.7 und 1.8 ergibt sich die gewünschte Gleichheit.
(ii) Als optimal partielle Strategie gilt jedes $\delta \in \Delta$ mit $\delta = (f_0, \dots f^*_{N-2}, f^*_{N-1})$ (induktiv rückwärts bis Stufe 0).

□

Der folgende Algorithmus, der sogenannre Werteiteration-Algorithmus zur Lösung des ESSDOP beruht auf der obigen Optimalitätsgleichung.

Algorithmus. Wertiteration für das ESSDOP
Input: Ein ESSDOP $(N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, p, r_n, f_n, v_N)$.
Begin: Setze $v'(s) = v_N(s)\ \forall s \in S_N$.
for $n = N-1$ downto 0 do
Setze $v(s) = v'(s)\ \forall s \in S_{n+1}$,
$\forall s \in S_n$ berechne

$$v'(s) = \max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') v(s') \right\}$$

und bestimme

$$f^*_n(s) \in \arg\max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{s' \in S_n+1} p(s,a,s') v(s') \right\}.$$

End
Setze $v_0(s_0) = v'(s_0)$, $\delta = (f^*_0, f^*_1, \dots f^*_{N-1})$.
Output: Optimaler erwarteter Gewinn $v_0(s_0)$, optimale Strategie δ^*.

Falls die Zustandsmengen S_n, $n = 0, 1, \dots, N$, und die Mengen $A_n(s)$ der im Zustand s der Stufe n möglichen Entscheidungen, für alle $n = 0, 1, \dots, N-1$ und alle $s \in S_n$ endlich sind, dann kann man das ESSDOP auch als lineares Optimierungsproblem formulieren.

Lösung des dynamischen Optimierungsproblems als lineares Programm

$$\min \sum_{n=0}^{N} \sum_{s \in S_n} w_{n,s} \tag{1.9}$$
$$\text{s.t. } w_{n,s} - \sum_{s' \in S_{n+1}} p_n(s,a,s') w_{n+1,s'} \geq r_n(s,a) \quad \forall n = 0, \dots N-1, \forall a \in A_n(s), \forall s \in S_n$$
$$w_{N,s} \geq v_N(s) \quad \forall s \in S_N$$

Behauptung: Der optimale Wert von 1.9 ist der durch den Algorithmus errechnete optimale Gewinn.

Beweis: Annahme: Die Behauptung gilt nicht.
Sei $w^*_{n,s}$ die optimale Lösung von 1.9 , seien $v_n(s)$ mit $s \in S_n$ die vom Algorithmus berechneten Werte und sei $k \in \{0, 1, \dots N\}$ der größte Index, sodass $v_k(s) \neq w_{k,s}$.
Beobachtung: $v_n(s)$ mit $n \in \{0, \dots N-1\}$ und $s \in S_n$ ist zulässig für 1.9. Es gilt

$$v_n(s) = \max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') v_{n+1}(s') \right\}$$
$$\Rightarrow v_n(s) \geq r_n(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') v_{n+1}(s') \quad \Rightarrow \text{1.Restiktion erfüllt}$$

und die 2. Restriktion ist auch erfüllt. Weiters gilt

$$\begin{aligned} w^*_{k,s} &\geq r_k(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') w^*_{k+1,s'} \\ &= r_k(s,a) + \sum_{s' \in S_{n+1}} p(s,a,s') v_{k+1}(s') \quad \forall a \in A_k(s), \forall s \in S_n. \end{aligned}$$

Dies gilt auch für $a = a^* = f^*_k(s) \Rightarrow w^*_{k,s} \geq v_k(s)$ und mit der Annahme über k folgt $w^*_{k,s} > v_k(s)$.
$\forall l = 0, \dots k-1$ kann man daher induktiv zeigen, dass

$$w^*_{l,s} \geq r_l(s,a) + \sum_{s' \in S_{l+1}} p(s,a,s') \underbrace{w^*_{l+1,s}}_{\geq v_{l+1}(s)} \quad \forall a \in A_l(s).$$

Dies gilt auch für $a_l = a^*_l = f^*_l(s)$

$$\Rightarrow w^*_{l,s} \geq r_l(s,a^*_l) + \sum_{s' \in S_{l+1}} p(s,a^*_l,s') v_{l+1}(s) = v_l(s).$$

Eingesetzt in die Zielfunktion liefert $v_n(s), n \in \{0, \dots N\}, \forall s \in S_n$ einen besseren Wert als die Optimallösung $w^*_{n,s} \Rightarrow$ Widerspruch!

□

Optimale Strategie: $\forall n \in \{0, \dots N-1\}, \forall s \in S_n \quad \exists a \in A_n(s)$, sodass die dazugehörige Restriktion mit Gleichheit erfüllt ist. Werde dieses a mit $a^*_n(s) =: f^*_n(s)$ bezeichnet, so bildet $(f^*_0, \dots f^*_{N-1})$ die optimale Strategie.

1.3.2 Ein Kontrollmodell

Oft ist eine exogene Zufallsvariable mitbestimmend für die optimale Strategie bzw. den optimalen Gewinn (Kosten) eines ESSDOP (z.B. die Nachfrage bei einem Lagerhaltungsproblem). Seien $Y_0, \dots Y_{N-1}$ exogene, unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsdichten

$$q_n(x) = P(Y_n = x) \quad \forall x \in X_n$$

und sei

$$\begin{aligned} s_{n+1} = {} & g_n(s_n, a, x_n) \in S_{n+1} \text{ und} \\ g_n : & D_n \times X_n \to S_{n+1}. \end{aligned}$$

Input: $(N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{X}, q, g, r, v_N)$ mit $N, \mathcal{S}, \mathcal{A}, r, v_N$ wie beim Basismodell und

- $\mathcal{X}$ ...Wertebereich der exogenen Variablen $Y_0, \dots Y_{N-1}$ (abzählbar), $X_i, \subseteq \mathcal{X}$ ist der nichtleere Wertebereiche von Y_i, $i =, 1, \dots, N-1$,
- $q_n : X_n \to [0,1]$... die Verteilungsdichte von Y_n,$n = 0, 1, \dots N-1$,
- $g_n : D_n \times X_n \to S_{n+1}$ ...die Übergangsfunktion.

Durch

$$p_n(s, a, s') = \sum_{x \in X_n : g(s,a,x) = s'} q_n(x) \quad \forall s \in S_n, \forall a \in A_n(s), \forall s' \in S_{n+1}$$

ergibt sich folgende Optimalitätsgleichung:

$$v_n(s) = \max_{a \in A_n(s)} \left\{ r_n(s,a) + \sum_{x \in X_n} q_n(x) v_{n+1}(g(s,a,x)) \right\} \quad \forall n = 0, \dots N-1.$$

Als nächstes betrachten wir Beispiele von Kontrollmodellen, in denen die optimale Strategie gewisse Struktureigenschaften aufweist.

Beispiel. Ein Hausbesitzer verkauft sein Haus. Zu den Zeitpunkten $n = 0, \dots N-1$ erhält er ein Angebot der Höhe x_n, wobei x_n als Realisierung einer Zufallsvariable Y_n mit Werten zwischen 0 und M aufgefasst wird. $Y_0, \dots Y_{N-1}$ sind iid mit $P(Y_n = x) = q(x)$ $\forall x = 0, \dots M$, $\forall n = 0, 1, \dots, N-1$. Falls ein Angebot abgelehnt wird, entstehen Kosten c.
Kontrollproblem:

- N ...Entscheidungshorizont,
- $\mathcal{S} = S_n = \{0, \dots M\} \cup \{\infty\}, n = 0, \dots N-1$ ...Menge der Angebote, bzw. Verkauf bereits getätigt,
- $\mathcal{A} = A_n(s) = \{0, 1\}$ ...Ablehnung/Annahme, für $s = \infty$ sind die Aktionen bedeutungslos,
- $\mathcal{X} = X_n = \{0, \dots M\}$,

- $q_n(x) = q(x)\ \forall x \in \mathcal{X},\ \forall n = 0, 1, \ldots, N-1,$
- $g_n(s,a,x) = \begin{cases} x & s \leq M, a = 0 \quad \text{lehne ab} \\ \infty & s = \infty \vee a = 1 \quad \text{nehme an} \end{cases},$
- $r(s,a) = \begin{cases} -c & s \leq M \wedge a = 0 \quad \text{lehne ab} \\ s & s \leq M \wedge a = 1 \quad \text{nehme an} \\ 0 & \text{sonst} \quad \text{hab schon Gewinn gemacht} \end{cases}$
- $v_N(s) = 0\ \forall s \in \mathcal{S}, v_n(\infty) = 0\ \forall n \leq N$ (schon verkauft)

$\Rightarrow$ Optimalitätsgleichung

$$v_n(s) = \max\left\{s, -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) v_{n+1}(x)\right\}$$

Sei $s_n^* = -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) v_{n+1}(x)\ \forall n = 0, \ldots N$, dann ist

$$f_n^*(s) = \begin{cases} 1 & s \geq s_n^* \\ 0 & s < s_n^* \end{cases}$$

die optimale Entscheidungsfunktion. Diese optimale Strategie bestätigt die Intuition: Ein gutes Angebot wird angenommen, ein schlechtes nicht. s_n^* präsentiert, was gut bzw. schlecht heißt.

Satz 1.3.6. Die Schwellen $s_0^*, s_1^*, \ldots s_{N-1}^*$ lassen sich rekursiv berechnen

$$s_n^* = \begin{cases} -c & n = N-1 \\ -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) \max\left\{x, s_{n+1}^*\right\} & 0 \leq n < N-1 \end{cases}$$

und es gilt $s_0^* \geq s_1^* \geq \ldots s_{N-1}^*$.

Beweis: Mit vollständiger Induktion von $N-1$ bis 0 beweisen wir

$$v_n(s) = \max\{s, s_n^*\} \quad \forall n = 0, \ldots N-1, \forall s = 0, \ldots M.$$

Da $v_N(s) = 0\ \forall s$, gilt $v_{N-1}(s) = \max\{s, -c\} = \max\left\{s, s_{N-1}^*\right\}\ \forall s = 0, \ldots M$.
Annahme: $v_{n+1}(s) = \max\left\{s, s_{n+1}^*\right\}$
Aus der Optimalitätsgleichung folgt

$$\begin{aligned} v_n(s) &= \max\left\{s, -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) \max\left\{x, s_{n+1}^*\right\}\right\} \\ &= \max\{s, s_n^*\}, \end{aligned}$$

wobei

$$s_n^* = -c + \sum_{x=0}^{M} \max\left\{x, s_{n+1}^*\right\}.$$

Monotonie:
Basis: $s^*_{N-2} \geq s^*_{N-1}$, da

$$s^*_{N-1} = -c \leq -c + \underbrace{\sum_{x=0}^{M} q(x) \max\{x, -c\}}_{\geq 0}.$$

Unter der Annahme, dass $s^*_{n+1} \geq s^*_{n+2}$ folgt

$$\begin{aligned} s^*_n &= -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) \max\left\{x, s^*_{n+1}\right\} \\ &\geq -c + \sum_{x=0}^{M} q(x) \max\left\{x, s^*_{n+2}\right\} \\ &= s^*_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Beispiel. (Stopp-Problem) Ein Investor hat die Option zum Kauf einer Aktie um Preis c. Das Optionsrecht kann zu den Zeitpunkten $n = 0, \ldots N-1$ ausgeübt werden. Der Börsenkurs der Aktie zum Zeitpunkt n ist

$$I_n = S_0 + Y_0 + Y_1 + \ldots Y_{n-1},$$

wobei $Y_0, \ldots Y_{n-1}$ iid-verteilt sind mit diskreter Verteilungsdichte

$$P(Y_i = x) = q(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}, i = 0, \ldots N-1.$$

Gesucht: Ausübungsstrategie, die den erwarteten Gewinn maximiert.
Kontrollmodell:

- $N \in \mathbb{N}$ $(n = 0, \ldots N-1)$ ... Planungshorizont,
- Zustand $\equiv$ Börsenkurs der Aktie, $\mathcal{S} = S_n = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ (letzteres entspricht der Situation, dass das Optionsrecht bereits ausgeübt wurde),
- $\mathcal{A} = A_n(s) = \{0, 1\} =$ (Nichtausübung, Ausübung),
- $\mathcal{X} = X_n = \mathbb{Z}$ $\forall n = 0, \ldots N-1$,
- $q_n(x) = q(x)$ $\forall n = 0, \ldots N-1$,
- $g_n(s, a, x) = \begin{cases} s + x & s < \infty, a = 0 \quad \text{Nichtausübung} \\ 0 & s = \infty \vee a = 1 \quad \text{Ausübung oder bereits ausgeübt} \end{cases},$
- $r_n(s, a) = \begin{cases} s - c & s < \infty, a = 1 \quad \text{Ausübung, Gewinn} \\ 0 & s = \infty \vee a = 0 \quad \text{Nichtausübung oder bereits ausgeübt} \end{cases},$
- $v_N(s) = 0$ $\forall s \in \mathcal{S}$

Optimalitätsgleichung:

$$v_n(s) = \max\{s-c, J_n(s)\} \quad \text{(maximal erwarteter Gewinn)},$$

wobei

$$J_n(s) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} q(x) v_{n+1}(s+x).$$

der erwartete zukünftige Gewinn bei Nichtausübung und $s-c$ der erzielte Gewinn bei Ausübung ist.

Satz 1.3.7. Für alle $n < N$ und alle $s \in \mathbb{Z}$ gilt

(i) $0 \leq J_n(s+1) - J_n(s) \leq 1$ (Gewinne steigen langsamer als die Preise) und

(ii) $0 \leq v_n(s+1) - v_n(s) \leq 1$ ("There is no free lunch").

Beweis: Vollständige Induktion von $n+1$ auf n:
Basis: Da $v_N(s) = 0\ \forall s$ ist, gilt $J_{N-1}(s) = 0\ \forall s$.

$$v_{N-1}(s) = \max\{s-c, J_{N-1}(s)\} = s-c \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

Somit erfüllen J_{N-1} und v_{N-1} die gewünschten Gleichungen.
Annahme: J_{n+1} und v_{n+1} erfüllen (i) bzw. (ii)
Zu zeigen: J_n, v_n erfüllen (i) bzw. (ii)
Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq J_n(s+1) - J_n(s) \\ &= \sum_{,x\in\mathbb{Z}} q(x)(v_{n+1}(s+1-x) - v_{n+1}(s-x)) \\ &\leq 1 \cdot \sum_{x\in\mathbb{Z}} q(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \checkmark$$

$$v_n(s+1) - v_n(s) = \max\{s+1-c, J_n(s+1)\} - \max\{s-c, J_n(s)\}.$$

Fallunterscheidung über die Annahme des Maximums:

- Zwei triviale Fälle:
  a) Maximum wird bei $s+1-c$ und $s-c$ angenommen: $0 \leq s+1-c-(s-c) = 1$ und
  b) Maximum wird bei $J_n(s+1)$ und $J_n(s)$ angenommen: $0 \leq J_n(s+1) - J_n(s) \leq 1$.

- Nichttriviale Fälle: a) Maximum wird bei $s+1-c$ und $J_n(s)$ angenommen:

  $$v_n(s+1) - v_n(s) = s+1-c-J_n(s) \leq s+1-c-(s-c) = 1$$

  und b) Maximum wird bei $J_n(s+1)$ und $s-c$ angenommen:

  $$v_n(s+1) - v_n(s) = J_n(s+1) - (s-c) \leq J_n(s+1) - J_n(s) \leq 1$$

  Analog zeigen wir, dass $0 \leq v_n(s+1) - v_n(s)$:

  $$a) v_n(s+1) - v_n(s) = s+1-c-J_n(s) \geq J_n(s+1) - J_n(s) \geq 0$$
  $$b) v_n(s+1) - v_n(s) = J_n(s+1) - (s-c) \geq s+1-c-(s-c) = 1 \geq 0$$

$\Rightarrow$ (ii) $\checkmark$

$\square$

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt, dass die erwarteten (zukünftigen) Gewinne langsamer als der Preis s steigen. Sei $M_n := \{s \in S_n \mid s - c \geq J_n(s)\}$, dann gilt

$$s_n^* = \min M_n \text{ und } \delta^* = (f_0^*, \dots f_{N-1}^*)$$

ist die optimale Strategie, wobei $f_n^*(s) = \begin{cases} 1 & s \geq s_n^* \\ 0 & s < s_n^* \end{cases}$, das heißt es wird nur ausgeübt, wenn der Preis s den Wert s_n^* erreicht oder übersteigt.

Beispiel. Ersetzungsmodell

- Zustand der Maschine $s \in \{0, \dots M\}, M \in \mathbb{N}$,
- Maschine wird zum Zeitpunkt $n = 0, \dots N-1$ inspiziert, dabei fällt die Entscheidung : ersetze oder nicht,
- der Preis einer neuen Maschine sei K,
- Betriebskosten $c(z_n)$, $z_n \dots$ Zustand der Maschine unmittelbar nach der Entscheidung,
- $z_n = s_n(1 - a_n)$ (s_n Zustand unmittelbar vor der Entscheidung),
- $\hat{q}(z_n, s_{n+1})\dots$ Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand der Maschine sich von z_n auf s_{n+1} verändert (Verschleiß)

Optimalitätsgleichung:

$$v_n(s) = \max \left\{ \underbrace{-c(s) + \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s, s') v_{n+1}(s')}_{\text{nicht ersetzen}}, \underbrace{-K - c(0) + \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(0, s') v_{n+1}(s')}_{\text{ersetzen}} \right\}$$

Die minimalen erwarteten Gesamtkosten ausgehend vom Zustand n im Zeitpunkt n sind $G_n(s) = -v_n(s)$.

$$G_n(s) = \min \{Y_n(s), K + Y_n(0)\}, \text{ wobei}$$
$$Y_n(s) := \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s, s') G_{n+1}(s').$$

Es ist

$$\begin{aligned} -v_n(s) &= -\max \left\{ -c(s) + \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s, s') v_{n+1}(s'), -K - c(0) + \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(0, s') v_{n+1}(s') \right\} \\ &= \min \left\{ c(s) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s, s') v_{n+1}(s'), K + c(0) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(0, s') v_{n+1}(s') \right\}. \end{aligned}$$

Annahmen:

(A1) $c(s) \leq c(s+1)$ $\forall s = 0, \ldots M-1$ entspricht höheren Betriebskosten bei einer älteren Maschine.

(A2) $v_N(s) \geq v_N(s+1)$ entspricht dem Restwert der Maschine in Zustand s (= terminaler Gewinn).

(A3) $\sum_{s'=i}^{M} \hat{q}(s,s') \leq \sum_{s'=i}^{M} \hat{q}(s+1,s')$ $\forall s = 0, \ldots M-1, \forall i = 0, \ldots M$.

Lemma 1.3.8. Sei $v : \{0, \ldots M\} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wenn (A3) erfüllt ist, dann gilt

$$\sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')v(s') \leq \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s+1,s')v(s').$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')v(s') &= \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')v(0) + \sum_{s'=1}^{M} \hat{q}(s,s')(v(1)-v(0)) \\
&\quad + \sum_{s'=2}^{M} \hat{q}(s,s')(v(2)-v(1)) + \ldots + \sum_{s'=M}^{M} \hat{q}(s,s')(v(M)-v(M-1)) \\
&= v(0) + \sum_{s'=1}^{M} (v(s')-v(s'-1)) \sum_{s''=s'}^{M} \hat{q}(s,s'') \\
&\overset{A3}{\leq} v(0) + \sum_{s'=1}^{M} (v(s')-v(s'-1)) \sum_{s''=s'}^{M} \hat{q}(s+1,s'') \\
&= \ldots \\
&= \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s+1,s')v(s')
\end{aligned}$$

□

Satz 1.3.9. Seien die Annahmen (A1)-(A3) erfüllt,
dann gilt $\forall n = 0, \ldots N-1, \forall s = 0, \ldots M-1$

(i) $Y_n(s) \leq Y_n(s+1)$ und

(ii) $G_n(s) \leq G_n(s+1)$.

Beweis: Vollständige Induktion von $n+1 \to n$:

Basis: Aus $G_N = -v_N$, aus (A1) und (A2) und dem vorhergehenden Lemma folgt

$$\begin{aligned}
Y_{N-1}(s) &:= c(s) + \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')G_N(s') \\
&= c(s) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')v_N(s') \\
&\leq c(s+1) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s+1,s')v_N(s') \quad \text{(Lemma, (A1))} \\
&= Y_{N-1}(s+1) \quad \forall s, \\
G_{N-1}(s) &= \min\{Y_{N-1}(s), K + Y_{N-1}(0)\} \\
&\leq \min\{Y_{N-1}(s+1), K + Y_{N-1}(0)\} \quad \text{(wegen (i))} \\
&= G_{N-1}(s+1).
\end{aligned}$$

Annahme: (i) und (ii) gelten für Y_{n+1} und G_{n+1}.
Zu zeigen: (i) und (ii) gelten auch für Y_n und G_n.

$$\begin{aligned}
Y_n(s) &= c(s) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s,s')v_{n+1}(s') \\
&\leq c(s+1) - \sum_{s'=0}^{M} \hat{q}(s+1,s')v_{n+1}(s') \\
&= Y_n(s+1) \\
G_n(s) &= \min\{Y_n(s), k + Y_n(0)\} \\
&\leq \min\{Y_n(s+1), k + Y_n(0)\} \\
&= G_n(s+1) \quad \forall s
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
M_n &:= \{s \in \{0,\dots M\} \mid Y_n(s) \geq K + Y_n(0)\} \quad \forall n = 0,\dots N-1 \\
S_n^* &:= \begin{cases} \min M_n & M_n \neq \emptyset \\ \infty & M_n = \emptyset \end{cases}
\end{aligned}$$

Die optimale Strategie $\delta^* = (f_0^*, \dots f_{N-1}^*)$ erfüllt $f_n^*(s) = \begin{cases} 1 & s \geq s_n^* \\ 0 & s < s_n^* \end{cases}$.

1.4 ESDDOP mit nicht diskretem Zustands- bzw. Aktionenraum

Situation: $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^m$ Zustandsraum, $S_n \subseteq \mathbb{R}^m$ $\forall n = 0,\dots N-1, \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^r$, $A_n(s_n) \subseteq \mathbb{R}^r$ $\forall n = 0,\dots N-1$,

$$s = \begin{pmatrix} s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ s^m \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a^r \end{pmatrix}$$

Anfangszustand: $s_0 \in \mathbb{R}^m$
Einstufige Gewinne: $r_n : D_n \to \mathbb{R} : (s,a) \to r_n(s,a)$, $D_n = \{(s,a) \mid s \in S_n, a \in A_n(s)\}$
Zustandstransformationsfunktion: $z_n : D_n \to \mathbb{R} : (s,a) \to z_n(s,a) \in S_{n+1}$
Terminaler Gewinn: $v_N : S_N \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(D): \quad & \max \sum_{n=0}^{N-1} r_n(s_n, a_n + v_N(s_N)) \\ \text{s.t. } & s_{n+1} = z_n(s_n, a) \quad (s_n, a) \in D_n \quad \forall n = 0, \dots N-1 \\ & s_0 \in \mathcal{S}, a \in A_n(s_n) \quad \forall n = 0, \dots N-1\end{aligned}$$

1.4.1 Lösbarkeit von (D) und Eindeutigkeit der Lösung

Satz 1.4.1. Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann besitzt (D) eine optimale Lösung.

(D1) Das Problem (D) besitzt mindestens eine zulässige Lösung,

(D2) $\forall n = 0, \dots N-1$ sind r_n und z_n stetig auf D_n,

(D3) S_n ist abgeschlossen für $n = 0, \dots N-1$,

(D4) $A_n(s_n)$ ist kompakt $\forall s_n \in S_n$ und

(D5) die Abbildungen $A_n : S_n \to \mathbb{R}^+ : s_n \mapsto A_n(s_n)$ sind stetig im Sinne der Hausdorff-Metrik.

Bemerkung. Hausdorff-Metrik: $A, B \in \mathbb{R}^r : d(A,B) = \sup\{\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A)\}$, mit $d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b)$

Beweis: Sei

$$\begin{aligned} G &:= \sum_{n=0}^{N-1} r_n(s_n, a_n), \\ G &: M \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $M \subseteq \mathbb{R}^{(m+r)N}$ die Menge der zulässigen Lösungen von (D) ist. Da die r_n alle stetig sind, folgt G ist stetig auf M. Wenn M kompakt ist, dann sind wir fertig. Wir zeigen daher, dass M abgeschlossen und beschränkt ist.
Sei S_n^+ die Menge der erreichbaren Zustände mit

$$\begin{aligned} S_n^+ &= \{s_n \in S_n \mid \exists s_{n-1} \in S_{n-1} \wedge \exists a \in A_{n-1}(s_{n-1}), s_n = z_{n-1}(s_{n-1}, a)\} \\ S_0^+ &= \{s_0\} \\ D_n^+ &= \left\{(s,a) \mid s \in S_n^+, a \in A_n(s)\right\} \quad \forall n = 0, \dots N-1. \end{aligned}$$

Wir beobachten $M \subseteq D_0^+ \times D_1^+ \times \ldots \times D_{N-1}^+, \{s_0, a_0, s_1, a_1, \ldots s_{N-1}, a_{N-1}\} \in M$.
1.) Beschränktheit von M:
Wir zeigen D_n^+ kompakt $\Rightarrow D_n^+$ beschränkt $\Rightarrow M$ beschränkt:
Wir zeigen induktiv die Kompaktheit von S_n und somit auch von D_n.
Induktion über n:
$n = 0 : S_0^+ = \{s_0\}$ kompakt $\Rightarrow D_0^+$ kompakt
Sei nun S_n^+ kompakt. Zu zeigen ist, dass S_{n+1}^+ kompakt ist.

$$\begin{aligned} S_{n+1}^+ &= \bigcup_{s \in S_n^+} z_n(s, A_n(s)) \\ D_n^+ &= \left\{(s,a) \mid s \in S_n^+, a \in A_n(s)\right\} \end{aligned}$$

D_n^+ abgeschlossen: Sei $((s_k, a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D_n^+ mit

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty}(s_k, a_k) = (\bar{s}, \bar{a}) \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty} s_k = \bar{s} \wedge S_n^+ \text{ kompakt} \\ &\Rightarrow \bar{s} \in S_n^+. \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \in A_n(s_k)$ und für A_n Hausdorff-stetig folgt

$$\bar{a} = \lim_{k\to\infty} a_k \in \lim_{k\to\infty} A_n(s_k) = A_n(\bar{s})$$

und somit $(\bar{s}, \bar{a}) \in D_n^+$.
D_n^+ beschränkt:

$$D_n^+ = \bigcup_{s\in S_n^+} (\{s\} \times A_n(s)) \subseteq \underbrace{S_n^+}_{\text{beschränkt, weil kompakt}} \times \underbrace{A_n(S_n^+)}_{\text{beschränkt, weil } A_n \text{ Hausdorff-stetig und} S_n^+ \text{kompakt}}$$

Kompaktheit von S_{n+1}^+:

$$S_{n+1}^+ = \left\{z(s,a) \mid (s,a) \in D_n^+\right\} = z_n(D_n^+)$$

ist kompakt, weil D_n^+ kompakt und z_n stetig ist
$\Rightarrow M$ beschränkt. (Daraus folgt wieder die Kompaktheit von D_{n+1}^+ usw.)
2.) Abgeschlossenheit von M:
$(s_0^{(k)} a_0^{(k)}, \ldots s_{N-1}^{(k)} a_{N-1}^{(k)}) \in M \ \forall k \in \mathbb{N}$
Dies strebt für $k \to \infty$ gegen $(\bar{s}_0 \bar{a}_0, \ldots \bar{s}_{N-1} \bar{a}_{N-1})$.
Zu zeigen ist, dass dieser Grenzwert auch in M liegt.
Es ist

$$a_0^{(k)} \in A_0(s_0^{(k)}), \ldots a_{N-1}^{(k)} \in A_{N-1}(s_{N-1}^{(k)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da A_n Hausdorff-stetig für alle $n = 0, \ldots N-1$ und $s_n^{(k)} \in S_n^+$ kompakt ist, folgt

$$\begin{aligned} &\bar{a}_0 \in A_0(\bar{s}_0), \ldots \bar{a}_{N-1} \in A_{N-1}(\bar{s}_{N-1}) \\ &\Rightarrow (\bar{s}_0 \bar{a}_0, \ldots \bar{s}_{N-1} \bar{a}_{N-1}) \in M \end{aligned}$$

$\Rightarrow M$ ist kompakt $\Rightarrow$ Maximum wird angenommen.

□

Notationen. Es sei v_n der optimale Gewinn eines Prozesses, der in Stufe n startet und

$$\begin{aligned}\varphi : D_n &\to \mathbb{R},\\ \varphi_n(s,a) &:= r_n(s,a) + v_{n+1}(z_n(s,a))\\ v_n(s) &= \max_{a\in A_n(s)} \varphi_n(s,a).\end{aligned}$$

Satz 1.4.2. Unter den Voraussetzungen (D1)-(D5) sind φ_n und v_n stetig auf D_n bzw. S_n $\forall n = 0, \dots N-1$.

Satz 1.4.3. Sei zusätzlich zu (D1)-(D5) auch die Konvexität von S_n und $A_n(s_n)$ gegeben $\forall n = 0, \dots N-1$ und seien weiters die r_n (streng) konvex und z_n linear auf D_n, dann sind φ_n und v_n (streng) konvex $\forall n = 0, \dots N-1$.

Satz 1.4.4. Unter den Voraussetzungen vom vorhergehenden Satz mit der strengen Konvexität besitzt (D) genau eine optimale Lösung und die Funktionen

$$f_n(s) = \arg\max_{a\in A_n(s)} \varphi_n(s,a)$$

sind eindeutig und stetig.

1.5 Das unendlich-stufige deterministische dynamische Optimierungsproblem

Situation: Die Perioden seien abzählbar unendlich, die Einteilung des Planungshorizonts sei so, dass die problemdefinierenden Größen innerhalb jeder Periode konstant bleiben.
Annahmen:

1) $z_n = z, r_n = r, S_n = S, A_n(s) = A(s)\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in S$,

2) Diskontierungsfaktor $\alpha = \frac{1}{1+p} \in (0,1), p \dots$ Zinssatz,

3) kein terminaler Gewinn vorhanden

$$\begin{aligned}(U) \quad & \max \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n r(s_n, a_n)\\ \text{s.t. } & s_{n+1} = z(s_n, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\\ & s_n \in S, s_0 \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}\\ & a_n \in A(s_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(U1) $S \subseteq \mathbb{R}^m, S \neq \emptyset, S$ ist abgeschlossen, $(\bar{U}1)$ …kompakt,

(U2) $\forall s \in S : A(s) \neq \emptyset$, kompakt und $A : S \to \varphi(\mathbb{R}^r) : s \mapsto A(s)$ ist Hausdorff-stetig, wobei $\varphi(\mathbb{R}^n)$ die Menge der kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^r$ ist, (U3) z ist stetig auf $D = \{(s,a) \mid s \in S, a \in A(s)\}$,

(U4) r ist stetig und beschränkt auf D und

(U5) $\forall s \in S \quad \exists a \in A(s) : z(s,a) \in S$ (garantiert Existenz einer zulässigen Lösung von (U)).

Anmerkung: Aus $(U4)$ folgt $\exists d' = \inf_{(s,a)\in D} r(s,a), d'' = \sup_{(s,a)\in D} r(s,a)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} d'\alpha^n \le \sum_{n=0}^{\infty} r(s,a)\alpha^n \le \sum_{n=0}^{\infty} d''\alpha^n \\
\Rightarrow\ &\frac{d'}{1-\alpha} \le \sum_{n=0}^{\infty} r(s,a)\alpha^n \le \frac{d''}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Notationen. Betrachte das endlich-stufige Problem mit $n = 0, \ldots N-1$ und

$$r_n(s,a) = \alpha^n r(s,a) \quad \forall (s,a) \in D.$$

Seien v_n^* die Lösungen der Optimalitätsgleichung

$$v_n(s) = \max_{a\in A_n(s)} \{r_n(s,a) + v_{n+1}(z(s,a))\} \quad n = 0, \ldots N-1. \tag{1.10}$$

Betrachte Perioden $j, j+1 \ldots n$ als Perioden $0, \ldots n-j$ eines $n-j+1$-stufigen Problems $\tilde{P}$, das in Periode j startet.
Sei $\tilde{v}_j^*(s)$ der maximale Gewinn mit Anfangszustand s.

Es gilt

$$v_j^*(s) = \alpha^j \tilde{v}_j^*(s) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Setze dies in 1.10 ein und erhalte damit

$$\begin{aligned}
\alpha^j \tilde{v}_j^*(s) &= \max_{a\in A_n(s)} \left\{\alpha^j r(s,a) + \alpha^{j+1}\tilde{v}_{j+1}(z)\right\} \quad / : \alpha^j \\
\tilde{v}_j^*(s) &= \max_{a\in A_n(s)} \{r(s,a) + \alpha\tilde{v}_{j+1}(z)\} \quad \forall j \in \mathbb{N} \qquad (1.11)\\
\tilde{v}_n^*(s) &= 0.
\end{aligned}$$

Setze $\tilde{v}_{j+1}^*(s) := \infty\ \forall s \in \mathbb{R}^m \setminus S$. Aufgrund von (U4) und (U5) gilt

$$-\infty < \tilde{v}_j^*(s) < \infty \quad \forall s \in S.$$

Sei $\chi_j^* = \tilde{v}_{n-j+1}^*$ ein Problem, das bei Stufe $n-j+1$ startet und in Stufe n endet ($j = 0, \ldots N-1$). $\chi_0^*(s) = v_n^*(s)$ und $\chi_j(s)$ ist der maximale Gewinn eines j-stufigen Problems mit Anfangszustand $s\ \forall s \in S, \forall j \in \mathbb{N}$. Setze χ_j^* in 1.11 ein und erhalte somit

$$\chi_j^*(s) = \max_{a\in A(s)} \left\{r(s,a) + \alpha\chi_{j-1}^*(z(s,a))\right\} \quad \forall j = 0, \ldots n, \forall n \in \mathbb{N} (\Leftrightarrow j \in \mathbb{N}). \tag{1.12}$$

Sei

$$\begin{aligned}
\varphi_j^* : D^+ \to \mathbb{R} : (s,a) &\mapsto r(s,a) + \alpha\chi_{j-1}^*(z(s,a)) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\
D^+ &= \{(s,a) \mid s \in S, a \in A(s), z(a,s) \in S\}
\end{aligned}$$

mit $\chi_0^*(s) = 0 \ \forall s \in S$.
Somit gilt

$$\chi_j^*(s) = \max_{a \in A(s)} \varphi_j^*(s,a).$$

Annahme o.B.d.A.: $r(s,a) \leq 0$, sonst $r' = r - d''$ und die Gesamtkosten des unendlichen Problems mit r' sind nun $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j d'' = \frac{d''}{1-\alpha}$ kleiner als die Gesamtkosten des ursprünglichen Problems. Da $\frac{d''}{1-\alpha}$ konstant und unabhängig von der Politik ist, sind beide Probleme äquivalent.

Satz 1.5.1. Unter den Voraussetzungen (U1)-(U5) und mit der obigen Annahme existieren Funktionen $\chi^* = \lim_{j\to\infty} \chi_j^*$ und $\varphi^* = \lim_{j\to\infty} \varphi_j^*$ und sind stetig auf S bzw. D^+. χ_j^* und φ_j^* konvergieren gleichmäßig gegen χ^* bzw. φ^* auf S bzw. D^+ (ohne Beweis).

Vorgehensweise: Bilde den Limes auf beiden Seiten von 1.12 und erhalte

$$\chi^*(s) = \max_{a \in A(s)} \{r(s,a) + \alpha \chi^*(z(s,a))\} \quad \text{Bellman'sche Funktionalgleichung,} \tag{1.13}$$

wobei χ^* der optimale Gewinn des unendlich-stufigen Problems ist.

Satz 1.5.2. Unter den Voraussetzungen (U1)-(U5) und der obigen Annahme besitzt die Bellman'sche Funktionalgleichung

$$w(s) = \max_{a \in A(s)} \{r(s,a) + \alpha w(z(s,a))\} \tag{1.14}$$

nur eine beschränkte Lösung.

Notationen.

$$f_j^* \in \arg\max_{a \in A(s)} \left\{\varphi_j^*(s,a)\right\} \quad \forall s \in S, \forall j \in \mathbb{N}$$
$$f^*(s) \in \arg\max_{a \in A(s)} \{r(s,a) + \alpha \chi^*(z(s,a))\} \quad \forall s \in S \text{ (optimale Politik)}$$

Bemerkung. Im Allgemeinen sind f_j^* und f^* nicht eindeutig.

Satz 1.5.3. Unter den Voraussetzungen (U1)-(U5) und der obigen Annahme ist jeder Häufungspunkt der Folge $f_j^*(s)$ gleich dem Funktionswert einer optimalen Politik f^* des unendlich-stufigen Problems (U) $\forall s \in S$.

Hat beispielsweise $f_j^*(s_0)$ 2 Häufungspunkte a, b, dann existieren f_1^*, f_2^* als Optimallösungen/Politik von (U), sodass $f_1^*(s_0) = a, f_2^*(s_0) = b$.

Bemerkung. Analog wie bei endlichstufigen Problemen gilt wenn D konvex, z auf D streng konvex und r linear ist, dann sind f_j^* und f^* eindeutig. In diesem Fall gilt $\lim_{j\to\infty} f_j^*(s) = f^*(s) \ \forall s \in S_0$.

1.5.1 Lösungsverfahren für das Problem (U): Wertiteration vs. Politikiteration

Wertiteration: Konstruiere Folgen χ_j^* und f_j^* mittels sukzessiver Auswertung der Funktionalgleichung 1.14. Löse beginnend mit $\chi_0^*(s) = 0\ \forall s \in S$

$$\begin{aligned}
\chi_1^*(s) &= \max_{a\in A(s)} \{r(s,a) + \alpha \cdot 0\} \\
f_1^*(s) &\in \arg\max_{a\in A(s)} \{r(s,a)\} \\
\chi_2^*(s) &= \max_{a\in A(s)} \{r(s,a) + \alpha\chi_1(z(s,a))\} \\
f_2^*(s) &\in \arg\max_{a\in A(s)} \{r(s,a) + \alpha\chi_1(z(s,a))\} \\
&\dots
\end{aligned}$$

und die weiteren $j \in \mathbb{N}$ bis ein Stoppkriterium

$$\left| \frac{\chi_j^*(s) - \chi_{j-1}^*(s)}{\chi_{j-1}^*(s)} \right| < \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ erfüllt ist.
Setze $\chi^* = \chi_j^*, f^* = f_j^*$ für das letzte j.

Politikiteration: Für alle s setze $f_1^+(s) \in \arg\max_{a\in A(s)} r(s,a)$. Sei χ_1^+ eine Lösung folgender Funktionalgleichung

$$\chi_1(s) = r(s, f_1^+(s)) + \alpha\chi_1(z(s, f_1^+(s)))$$

und sei $\varphi_j^+ : D^+ \to \mathbb{R}$, sodass

$$\varphi_j^+(s,a) = r(s,a) + \alpha\chi_{j-1}^+(z(s,a)) \quad \forall 2 \le j \in \mathbb{N}$$

mit $\chi_0^+(s) = 0\ \forall s$.
Sei

$$f_j^+(s) \in \arg\max_{a\in A(s)} \varphi_j^+(s,a), \tag{1.15}$$

dann bestimme eine Lösung χ_j^+ der Funktionalgleichung

$$\chi_j(s) = r(s, f_j^+(s)) + \alpha\chi_j(z(s, f_j^+(s))) \tag{1.16}$$

solange bis ein Stoppkriterium

$$\left| \frac{\chi_j^+(s) - \chi_{j-1}^+(s)}{\chi_{j-1}^+(s)} \right| < \varepsilon$$

für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ erfüllt ist.

Bemerkung. Wir tun so als ob $f_j^+(s)$ die beste Politik wäre. Es ist eine Approximation.

Satz 1.5.4. Unter den Voraussetzungen (U1)-(U5) und der obigen Annahme hat die Funktionalgleichung 1.16 genau eine beschränkte Lösung χ_j^* für jede gemäß 1.15 festgelegte Funktion $f_j^+ \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Satz 1.5.5. Mit den gleichen Voraussetzungen wie im vorhergehenden Satz und erfüllten Annahmen konvergiert die Folge der (eindeutigen) beschränkten χ_j^+ gleichmäßig gegen χ^*, wobei χ^* die eindeutig beschränkte Lösung von (U) ist. Weiters ist jeder Häufungpunkt der Folge $f_j^+(s)$ der Wert einer optimalen Politik f^* an der Stelle s $\forall s \in S$.

Vergleich:

- Die Wertiteration ist leichter umsetzbar als die Politikiteration. Bei der Politikiteration muss in jeder Iteration eine im Allgemeinen nicht triviale Funktionalgleichung gelöst werden.
- Wenn $f_j^+ = f_{j+1}^+$ für $j \in \mathbb{N}$, dann sind die Folgen f_i^+ und $\chi_i^+, i \geq j$ konstant. Der optimale Gewinn liegt vor

$$\chi^* = \lim_{i \to \infty} \chi_i^+ = \chi_j^+.$$

- Die Politikiteration ist sinnvoll, falls eine gute bekannte Politik verbessert werden soll.
- Wertiteration:

$$\chi_j^* \to \chi^* = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j r(s, f_j^*(s))$$

  Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt von α ab.
  Politikiteration: Die Konvergenzgeschwindigkeit ist i.A. unabhängig von α, daher ist es sinnvoll für $\alpha \approx 1$ die Politikiteration zu wählen (entspricht einem niedrigen Zinssatz p, denn $\alpha = \frac{1}{1+p}$).

Kapitel 2

Lagerhaltungsprobleme

Funktion: Ein Lager dient zur Entkopplung der Bedarfserfüllung (Verkauf) von dem Produktions- bzw. Bestellungsprozess.

Typen: Ein-Produkt-Lager, Mehr-Produkt-Lager, Just-in-time-Systeme (möglichst kleines Lager), Multi-echelon-systems (Lager bekommt halbfertige Produkte und muss noch Produktionsschritte durchführen), Supply-chain-management, Material-replanishment-planing

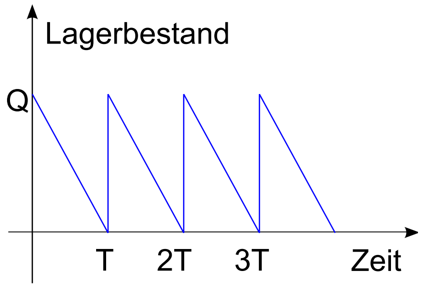
Wir betrachten Ein-Produkt-Lager und treffen die folgenden Annahmen:

- das Produkt wird nur an einem Standort gelagert und hat kein Ablaufdatum,
- die Nachfrage ist konstant über die Zeit,
- es sind keine Fehlmengen erlaubt,
- das Lager produziert nicht selbst, es existiert nur ein vordefinierter Lieferant,
- es gibt keine Mengenrabatte,
- es existiert keine Lieferzeit,
- der Planungshorizont ist unendlich,
- alle Parameter des Modells sind konstant im Zeitablauf (stationär),
- die Bestellgröße ist konstant über die Zeit und
- man hat folgende Kosten:
  - Lagerungskosten h pro Produkt- und Zeiteinheit,
  - fixe Bestellkosten K pro Bestellung, unabhängig von der bestellten Menge und
  - variable Bestellkosten c pro Produkteinheit.

Frage: Wann und wie viel soll bestellt werden?

2.1 Das grundlegende Lagerhaltungsmodell

Bemerkung. Es wird auch als Sägezahnmodell bezeichnet und im Englischen redet man vom Economic Order Quality Modell (EOQ).



$L = Q - rt$ im Intervall $[0, T]$ (Lagerbestand) $Q \dots$ Bestellmenge
$r \dots$ Lagerabgangsrate (konstant, dadurch ist die Nachfrage beschrieben)
$T = \frac{Q}{r} \dots$ Zykluslänge

Aufgabe: Bestimme Q (bzw. T), sodass die Gesamtkosten pro Zeiteinheit minimiert werden!

Lagerhaltungskosten:
$h \dots$ Kosten für das Lagern einer Produkteinheit über eine Zeiteinheit
$\frac{Q}{2} \dots$ mittlerer Lagerbestand im Laufe eines Zyklus
$h\frac{Q}{2} \dots$ mittlere Lagerungskosten je Zeiteinheit
$h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q^2}{2r} \dots$ Lagerungskosten pro Zyklus
Bestellkosten über einen Zyklus:

$$K\delta(Q) + cQ$$

mit $\delta(Q)$ als Indikatorfunktion
Gesamtkosten pro Zyklus:

$$K\delta(Q) + cQ + \frac{hQ^2}{2r}$$

Gesamtkosten pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} C(Q) &= \frac{K\delta(Q)}{\frac{Q}{r}} + \frac{cQ}{\frac{Q}{r}} + \frac{hQ^2}{2r\frac{Q}{r}} \\ &= \frac{Kr\delta(Q)}{Q} + cr + \frac{hQ}{2} \end{aligned}$$

Minimum bestimmen:

$$C(Q)' = -\frac{Kr}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2Kr}{h}} \tag{2.1}$$

$$C(Q)'' = \frac{2Kr}{Q^3} > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum eindeutig, optimale Losgröße
Optimale Zykluslänge:

$$T^* = \frac{Q^*}{r} = \sqrt{\frac{2K}{hr}} \tag{2.2}$$

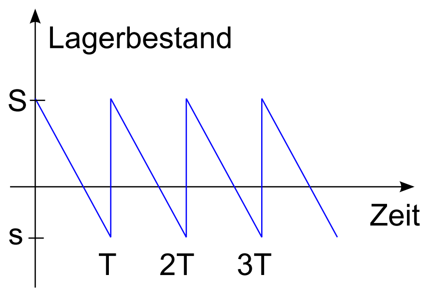
Minimale Kosten je Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} C(Q^*) &= \frac{Kr}{\sqrt{\frac{2Kr}{h}}} + cr + \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2Kr}{h}} \\ &= \sqrt{\frac{hKr}{2}} + cr + \sqrt{\frac{hKr}{2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{hKr}{2}} + cr \\ &= \sqrt{2hKr} + cr \end{aligned}$$

Beobachtung: Q^* und T^* hängen nicht von den variablen Bestellkosten c ab.

1. Erweiterung des Modells: Fehlmengen sind erlaubt.

- $p\ldots$ Fehlmengenkosten pro Produkt- und Zeiteinheit,
- S und s ($s < 0$) ... sind die Lagerbestände zu Beginn bzw. am Ende eines Zyklus,
- $S\ldots$ Lagerbestand unmittelbar nach Eintreffen einer Bestellung,
- $s\ldots$ Lagerbestand unmittelbar vor Eintreffen einer Bestellung,
- $Q\ldots$ Bestellmenge (Losgröße),
- $s = S - Q$ (maximale Fehlmenge)



$L = S - rt$ im Intervall $[0, T]$

Aufgabe: Q, S bestimmen, sodass die Gesamtkosten je Zeiteinheit minimal sind.

Lagerungskosten in $[0, T]$: fallen in $[0, \frac{S}{r}]$ an

- mittlerer Lagerbestand: $\frac{S}{2}$,

- mittlere Lagerungskosten je Zeiteinheit: $h\frac{S}{2}$,
- Lagerungskosten je Zyklus: $h\frac{S}{2}\frac{S}{r} = \frac{hS^2}{2r}$

Fehlmengen im Zyklus $[0, T]$: fallen in $[\frac{S}{r}, T = \frac{Q}{r}]$ an (Intervalllänge $\frac{Q-S}{r}$)

- mittlere Fehlmenge: $\frac{s}{2} = \frac{S-Q}{2} < 0$,
- mittlere Fehlmengenkosten je Zeiteinheit: $p\frac{Q-S}{2}$,
- Fehlmengenkosten je Zyklus: $p\frac{Q-S}{2}\frac{Q-S}{r} = \frac{p(Q-S)^2}{2r}$

Bestellkosten:

$$K\delta(Q) + cQ$$

Gesamtkosten je Zyklus:

$$K\delta(Q) + cQ + \frac{hS^2}{2r} + \frac{p(Q-S)^2}{2r}$$

Gesamtkosten je Zeiteinheit:

$$C(Q,S) = \frac{K\delta(Q)r}{Q} + cr + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$$

Minimum bestimmen:

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{-2rK + p(Q^2 - S^2) - hS^2}{2Q^2} = 0$$
$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{hS - p(Q-S)}{Q} = 0$$

Die Hessematrix ist positiv definit und wir erhalten wie gewünscht ein Minimum. Es werden folgende optimale Größen angenommen:

$$\begin{aligned}
S^* &= \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} \quad \text{optimaler höchster Lagerbestand} \\
Q^* &= \frac{h+p}{p}S = \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \sqrt{\frac{h+p}{p}} \quad \text{optimale Losgröße} \\
s^* &= S^* - Q^* \\
&= \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{p+h}} - \sqrt{\frac{h+p}{p}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2rK}{h}} \cdot \left(\frac{p-(p+h)}{\sqrt{p(p+h)}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2rKh}{p(p+h)}} \\
&= \sqrt{\frac{2rK}{p}} \cdot \sqrt{1 - \frac{p}{p+h}} \quad \text{optimale negative Fehlmenge} \\
T^* &= \frac{Q^*}{r} = \sqrt{\frac{2K}{hr}} \cdot \sqrt{\frac{h+p}{p}} \quad \text{optimale Zykluslänge}
\end{aligned}$$

Minimale Kosten je Zeiteinheit:

$$C^* = C(Q^*, S^*) = rc + \sqrt{2rKh} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}}$$

Beobachtung:

- $\frac{S^*/r}{Q^*/r} = \frac{S^*}{Q^*} = \frac{p}{p+h}$ ist unabhängig von K und c.
- Für $p \to \infty$ erhält man die Lösung eines Basismodells ohne Fehlmengen.
- Die optimale Lösung ist eine sogenannte (s, S)-Politik mit Bestellpunkt s (Höhe des Lagerbestands, zu der eine Bestellung abgegeben wird) und Bestellgrenze S (bis zu welcher Grenze wird Lager gefüllt).

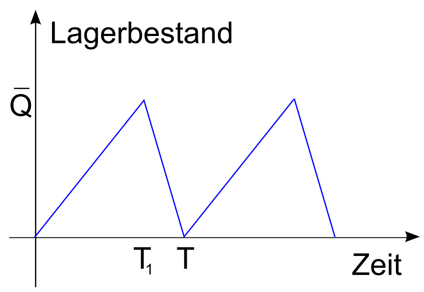
2. Erweiterung des Modells: Lieferzeiten vorhanden
Hier gibt es eine Lieferzeitkonstante λ.
Fallunterscheidung:

1.) $\lambda < T^*$: Wähle den Bestellzeitpunkt so, dass die Bestellung zum Bestellpunkt eintrifft.
Bestellzeitpunkte: $T^* - \lambda, 2T^* - \lambda, \ldots,$

2.) $\lambda \geq T^* : l := \lfloor \frac{\lambda}{T^*} \rfloor \Rightarrow \lambda = lT^* + R, 0 \leq R < T^*$
Bestellzeitpunkte: $T^* - \lambda, 2T^* - \lambda, \ldots \Rightarrow T^* - R, 2T^* - R, \ldots$

3. Erweiterung: Lager produziert selbst mit konstanter Produktionsrate $\rho > 0$

- wenn $\rho > r$, dann sind Fehlmengen nicht erlaubt,
- die Anlaufzeit für die Produktion sei gleich 0,
- $\bar{Q} \ldots$ ist der maximale Lagerbestand,
- $Q \ldots$ produzierte Menge je Zyklus



Es gilt

$$L = \begin{cases} t(\rho - r) & 0 \leq t \leq T_1 \text{(produziere und verkaufe)} \\ -tr + Q & T_1 \leq t \leq T \text{(verkaufe nur)} \end{cases} \quad T_1 \qquad = \frac{\bar{Q}}{\rho - r}$$

$$Q = \rho T_1 = Tr$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{Tr}{\rho} = \frac{Q}{\rho}.$$

Mittlerer Lagerbestand je Zyklus:

$$\frac{\bar{Q}}{2} = \frac{(\rho - r)T_1}{2} = \frac{(\rho - r)Q}{2\rho}$$

Mittlere Lagerungskosten je Zeiteinheit:

$$h\frac{(\rho - r)Q}{2\rho}$$

Lagerungskosten je Zyklus:

$$\begin{aligned} h\frac{(\rho - r)Q}{2\rho}T &= h\frac{(\rho - r)Q}{2\rho}\frac{Q}{r} \\ &= h\frac{(\rho - r)Q^2}{2r\rho} \end{aligned}$$

Produktionskosten je Zyklus: $K + cQ$
Gesamtkosten je Zyklus:

$$K + cQ + h\frac{(\rho - r)Q^2}{2r\rho}$$

Gesamtkosten je Zeiteinheit:

$$C(Q) = \frac{Kr}{Q} + cr + \frac{h(\rho - r)Q}{2\rho}$$

Bemerkung. Das ist das Minimierungsproblem des grundlegenden Lagerhaltungsproblems (EOQ) mit $h_{EOQ} = h\frac{\rho - r}{\rho}$.

Daraus folgen die nachstehende optimalen Größen:

$$\begin{aligned} Q^* &= \sqrt{\frac{2rK}{h(1 - \frac{r}{\rho})}} \\ T^* &= \sqrt{\frac{2K}{h(1 - \frac{r}{\rho})r}} \\ C^* &= \sqrt{2rh\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)K + cr}. \end{aligned}$$

4. Erweiterung: Mengenrabatte.

- variable Produktionskosten abhängig von Q, es ist für $0 < c'' < c'$

$$c(Q) = \begin{cases} c' & 0 \leq Q < \bar{Q} \\ c'' & Q \geq \bar{Q} \end{cases},$$

- keine Fehlmengen, keine Anlaufzeit

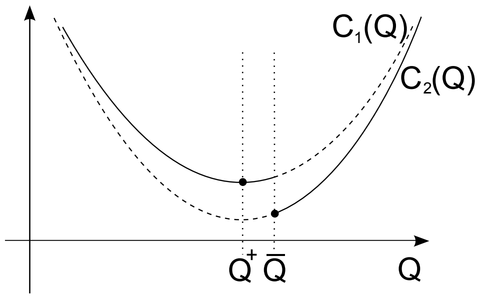
Gesamtkosten je Zeiteinheit:

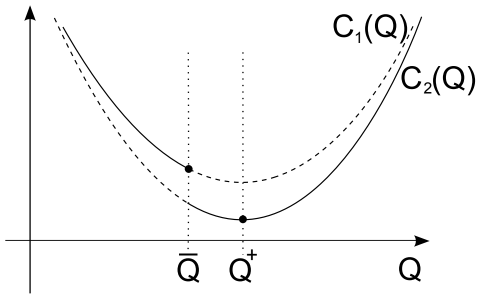
$$C(Q) = \frac{rK}{Q} + rc(Q) + \frac{hQ}{2}$$
$$C_1(Q) = \frac{rK}{Q} + rc' + \frac{hQ}{2}$$
$$C_2(Q) = \frac{rK}{Q} + rc'' + \frac{hQ}{2}$$

Sei Q^+ die minimale Stelle von $C_1(Q)$ und $C_2(Q)$. Dann ist für

1.) $\bar{Q} > Q^+ : Q^* = \begin{cases} Q^+ & C_1(Q^+) \leq C_2(\bar{Q}) \\ \bar{Q} & \text{sonst} \end{cases}$ und

2.) $\bar{Q} \leq Q^+ : Q^* = Q^+$.





2.2 Ein deterministisches dynamisches Lagerhaltungsmodell

Annahmen:

- endlicher Zeithorizont, Perioden $1, \dots n$,
- Nachfrage je Periode r_j bekannt im Voraus $j = 1, \dots n$,
- fixe Bestellkosten K konstant im gesamten Zeithorizont,
- Stückpreise c pro Produkteinheit, konstant in der Zeit,
- Lagerhaltungskosten h pro Zeit- und Mengeneinheit konstant in der Zeit,
- Bestellmenge $u_j, j = 1, \dots n$

Gesucht: Bestellpolitik, die die Gesamtkosten minimiert.

Es gilt o.B.d.A. folgendes

- $r_j > 0 \; \forall j = 1, \dots n$, wenn ein $r_k = 0$, dann lege 2 Perioden zusammen.

- Der Bedarf wird sofort nach der Bestellung zu Beginn der Periode erfüllt. Die Lagerhaltungskosten werden bzgl. des Lagerbestands am Ende der Periode berechnet. (zu Beginn x_0, bestelle u_1, Abgang $-r_1$ und habe dann x_1 am Ende von der 1. Periode bzw. am Anfang der 2. Periode (vor Bestellung) usw.)
- $x_0 = x_n = 0$

Es ist

$$x_j = x_{j-1} + u_j - r_j \quad \forall j = 1, \dots n \quad \text{Lagerhaltungsgleichung.} \tag{2.3}$$

Die variablen Bestellkosten $c\sum_{j=1}^{n} r_j$ sind unabhängig von der Bestellpolitik und daher für die Optimierung irrelevant. Sie werden daher für die Bestimmung der optimalen Lösung vernachlässigt.
Die minimalen Kosten des Problems für die Perioden $1, \dots j$ sind $C_j^*(x_j)$, wobei x_j der Lagerbestand am Ende von Periode j ist. Es ergibt sich

$$C_j^*(x_j) = \min_{0 \le u_j \le x_j + r_j} \left\{ \delta(u_j)K + hx_j + C_{j-1}^*(\underbrace{x_{j-1}}_{=x_j - u_j + r_j}) \right\} \quad \forall j = 1, \dots n, \tag{2.4}$$

wobei $C_0(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$ und $C_j^*(x) = \infty \ \forall x < 0$.

Bemerkung. Die Grenzen für u_j beim Minimum sind aus 2.3 zu folgern. Das Problem wird mit Wertiteration gelöst.

Lemma 2.2.1. Sei x^*, u^* eine optimale Lösung des obigen Problems, dann gilt für alle $j = 1, \dots n$, dass

$$x_{j-1}^* = 0 \wedge u_j^* > 0 \text{ oder } x_{j-1}^* > 0 \wedge u_j^* = 0.$$

Beweis: Annahme: Es existieren optimale Lösungen x^*, u^* und $j_0 \in [1, \dots n]$ mit $x_{j_0-1}^* > 0 \wedge u_{j_0}^* > 0$. Sei

$$\begin{aligned} x_{j_0-1}^+ &= 0 \\ u_{j_0}^+ &= u_{j_0}^* + x_{j_0-1}^* \ge u_{j_0}^* > 0 \\ x_{j_0}^+ &= x_{j_0-1}^+ + u_{j_0}^+ - r_{j_0} \\ &= 0 + u_{j_0}^+ - r_{j_0} \\ &= x_{j_0-1}^* + u_{j_0}^* - r_{j_0} = x_{j_0}^*. \end{aligned}$$

Die neue Lösung sieht ab j_0 wie folgt aus

$$\dots x_{j_0-1}^+ = 0, u_{j_0}^+, x_{j_0}^+ = x_{j_0}^*, u_{j_0+1}^+ = u_{j_0+1}^*, \dots$$

Sei $P^{(j_0)}$ ein (j_0-1)-stufiges Problem mit gleichem Input wie das ursprüngliche Problem und sei $x_{j_0-1} = 0$ (leeres Lager am Ende). Sei $x^{+(j_0)}, u^{+(j_0)}$ eine optimale Lösung und seien $C^{+(j_0)}$ die minimalen Kosten von $P^{(j_0)}$. Dann gilt

$$C^{+(j_0)} \le C_{j_0-1}^*(x_{j_0-1}),$$

da man ausgehend von x^*_{i-1}, u^*_i für $i = 1, \ldots j_0 - 1$ eine Lösung von $P^{(j_0)}$ konstuieren kann, indem die bestellte Menge u^*_i dementsprechend verringert wird, da man bei $P^{(j_0)}$ ein leeres Lager am Ende hat. Es gilt sogar "<", da $x_{j_0-1} > 0$ nach Voraussetzung und somit fallen Lagerkosten an (rechte Seite).
Seien C^+ die Kosten der +-Lösung, dann ist

$$\begin{aligned} C^+ &= C^{+(j_0)} + \sum_{j=j_0}^{n} [K\delta(u_j^+) + hx_j^+] \\ &< C^*_{j_0-1}(x_{j_0-1}) + K \underbrace{\delta(u_{j_0}^+)}_{\delta(u^*_{j_0})} + \underbrace{hx_{j_0}^+}_{hx^*_{j_0}} + \sum_{j>j_0}^{n} [K\delta(u_j^*) + hx_j^*] \\ &= C^*. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von C^* und somit folgt die Aussage des Lemmas.

□

Folgerung:

- $u^*_j > 0 \Rightarrow x^*_{j-1} = 0 \Rightarrow u^*_j \geq r_j$.
- Falls $u^*_j > r_j \Rightarrow x^*_j > 0 \Rightarrow u^*_{j+1} = 0 \Rightarrow u^*_j \geq r_j + r_{j+1}$ usw.
- Es gilt

$$u^*_j \in \{r_j, r_j + r_{j+1}, \ldots, r_j + \ldots r_{j+n}\}, \tag{2.5}$$

  das heißt, sobald ich weiß wann ich bestelle, weiß ich auch wie viel.

Weiters gilt: Sei j so, dass $x^*_j = 0$ (dieses existiert, da $x^*_n = 0$) und sei $k \in \{0, \ldots j-1\}$ so gewählt, dass $x^*_k = 0, x^*_{k+1} > 0, \ldots x^*_{j-1} > 0$, das heißt k ist der größte Periodenindex kleiner j mit leerem Lager am Ende vor Periode j (existiert, da $x^*_0 = 0$) . Aus 2.5 folgt

$$\begin{aligned} u^*_{k+1} &= r_{k+1} + \ldots + r_j \\ u^*_{k+2} &= u^*_{k+3} \ldots u^*_j = 0 \\ x^*_{k+1} &= r_{k+2} + \ldots + r_j \\ x^*_{k+2} &= r_{k+3} + \ldots + r_j \\ &\ldots \\ x^*_{j-1} &= r_j. \end{aligned}$$

Minimale Kosten über die Perioden $k+1, \ldots j$:

$$\begin{aligned} &K + h(x^*_{k+1} + \ldots + x^*_{j-1}) = K + h(r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots + (j-1-k)r_j) \\ &\Rightarrow C^*_j(x^*_j = 0) = \min_{0 \leq k \leq j-1} \{K + h(r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots + (j-1-k)r_j + C^*_k(x^*_k = 0)\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(Rückwärtsrekursion, r_{k+1} geht sofort wieder weg - keine Lagerkosten)

Sei

$$\begin{aligned} I_j(k) &:= K + h(r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots + (j-1-k)r_j) + C_k^*(x_k^* = 0) \\ &\quad \forall j = 1, \ldots n, \forall k = 0, \ldots j-1 \qquad (2.7) \\ C_j^*(0) &= \min_{0 \le k \le j-1} I_j(k) =: I_j^* \qquad (2.8) \\ k_j^* &:= \max \left\{ \underset{0 \le k \le j-1}{\arg\min} I_j(k) \right\} \end{aligned}$$

Aus 2.6 - 2.8 folgt für $k \le j-2$

$$\begin{aligned} I_j(k) &= K + h(r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots + (j-2-k)r_{j-1} + (j-1-k)r_j) + C_k^*(x_k^* = 0) \\ &= K + h(r_{k+2} + 2r_{k+3} + \ldots + ((j-1)-1-k)r_{j-1}) + C_k^*(x_k^* = 0) + h(j-1-k)r_j \\ &= I_{j-1}(k) + h(j-1-k)r_j. \qquad (2.9) \end{aligned}$$

und für $k = j-1$

$$I_j(k) = I_j(j-1) = K + I_{j-1}^*. \qquad (2.10)$$

Algorithmus. Wagner und Whitin
Schritt 1: Vorwärts: $I_1^* = I_1(0) = K$ und $k_1^* = 0$
Für $j = 2, 3, \ldots n$ bestimme

$$\begin{aligned} I_j(k) &= \begin{cases} I_{j-1}(k) + (j-1-k)hr_j & 0 \le k \le j-2 \\ I_{j-1}^* + K & k = j-1 \text{(bestelle nur f. eine Periode)} \end{cases} \\ I_j^* &= \min_{0 \le k \le j-1} I_j(k) \\ k_j^* &= \max \left\{ \underset{0 \le k \le j-1}{\arg\min} I_j(k) \right\}. \end{aligned}$$

Setze $C^* = I_n^* + c(r_1 + \ldots + r_n)$.
Schritt 2: Rückwärts: Setze

$$\begin{aligned} l &= k_n^* \\ u_{l+1}^* &= r_{l+1} + \ldots + r_n \\ u_{l+2}^* &= u_{l+3}^* = \ldots = u_n^* = 0. \end{aligned}$$

Solange $l > 1$, setze

$$\begin{aligned} m &= k_l^* \\ u_{m+1}^* &:= r_{m+1} + \ldots + r_l \\ u_{m+2}^* &= u_{m+3}^* = \ldots = u_l^* = 0 \\ l &:= m. \end{aligned}$$

Output: u_i für $i = 1, \ldots m$ und C^*.

Satz 2.2.2. Der Algorithmus liefert eine korrekte Lösung des dynamischen Lagerhaltungsproblems aus diesem Abschnitt. Eine triviale Implementierung liefert eine Laufzeit von $O(n^2)$. Unter Verwendung von „balanced binary trees“ kann der Algorithmus in $O(n)$ implementiert werden. Bei zeitabhängigen fixen Bestellkosten K_i, variablen Bestellkosten c_i und Lagerungskosten $h_i, i = 1, \dots n$ lässt sich der Algorithmus in $O(n \log n)$ Zeit implementieren, vorausgesetzt $K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_n$.

Beweis: Die Korrektheit folgt aus 2.9-2.10. Die Laufzeit von $O(n)$ ist trivial. Bei weiterem Interesse siehe [1].

Beispiel. $K = 2 \cdot 10^6 = 2$ Mio, $h = 2 \cdot 10^5 = 0.2$ Mio

Winter $j = 1$	Frühling $j = 2$	Sommer $j = 3$	Herbst $j = 4$
3	2	3	2

- Start:

$$\begin{aligned} I_1^* &= I_1(0) = K = 2 \\ k_1^* &= 0 \end{aligned}$$

- $j = 2$:

$$\begin{aligned} I_2^* &= \min_{k \in \{0,1\}} I_2(k) = 2.4 \\ k_2^* &= 0, \quad \text{weil} \\ I_2(k) &= \begin{cases} I_1(0) + 1 \cdot 0.2 \cdot 2 = 2.4 & k = 0 \\ K + I_1^* = 4 & k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- $j = 3$:

$$\begin{aligned} I_3^* &= 3.6 \\ k_3^* &= 0, \quad \text{weil} \\ I_3(k) &= \begin{cases} I_2(k) + (2 - k) \cdot 0.2 \cdot 3 & k = 0, 1 \\ K + I_2^* & k = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2.4 + 1.2 = 3.6 & k = 0 \\ 4 + 0.6 = 4.6 & k = 1 \\ 2 + 2.4 = 4.4 & k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- $j = 4$:

$$\begin{aligned} I_4^* &= 4.8 \\ k_3^* &= 2, \quad \text{weil} \\ I_4(k) &= \begin{cases} I_3(k) + (3-k)\cdot 0.2 \cdot 2 & k = 0,1,2 \\ K + I_3^* & k = 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4.8 & k = 0 \\ 5.4 & k = 1 \\ 4.8 & k = 2 \\ 5.6 & k = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Die letzte Bestellung, die bis zum Ende der Zeit reicht, wird nach Periode 2 getätigt, denn $k_4^* = 2$. Betrachte nun $k_2^* = 0$, und folgere, dass die letzte Bestellung für bis zum Ende von Periode 2 zum Zeitpunkt 0, also am Anfang gemacht wird.

$$\begin{aligned} u_1^* &= 3 + 2 = 5 \quad \text{Bedarf Winter und Frühling} \\ u_3^* &= 3 + 2 = 5 \quad \text{Bedarf Sommer und Herbst} \\ C^* &= I_4^* + c(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \quad \text{minimale Kosten} \end{aligned}$$

2.3 Ein serielles zweistufiges Lagersystem

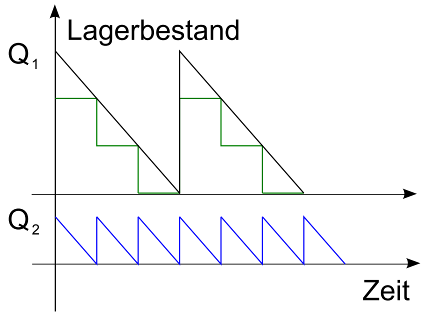
Situation:
1. Stufe: Teilproduktions- und Lagerstätte
2. Stufe: Fertigstellungs- und Lagerstätte

Annahmen:

- EOQ-Annahmen gelten in Stufe 2 (konstante Abgangsrate, keine Fehlmengen, Bestellung, wenn Lager leer),
- fixe Bestellkosten im Zeitablauf K_i in Stufe $i = 1, 2$,
- Stufe 1 verwendet das Lager ausschließlich um Stufe 2 zu beliefern, Lieferzeit ist vernachlässigbar,
- fixe Lagerungskosten h_i pro Mengen- und Zeiteinheit in Stufe $i = 1, 2$ und $h_1 < h_2$,
- eine Einheit des unfertigen Produkts in Stufe 1 wird benötigt um ein fertiges Produkt in Stufe 2 zu erzeugen und
- fixe Bestellgröße Q_i in Stufe $i = 1, 2$.

Ziel: Minimierung der Gesamtkosten beider Stufen.

Bemerkung. $h_1 < h_2$ ist sinnvoll, da Produkt in Station 2 mehr Wert hat als in Stufe 1 und falls $h_1 > h_2$ ist, dann verschicke das Teilprodukt sofort.



Notationen. Echelon-Lagerbestand in Stufe 1 in Zeitpunkt t ist der physikalische Lagerbestand im Lager 1 zum Zeitpunkt t zusammen mit dem physikalischen Lagerbestand im Lager 2 zum Zeitpunkt t.

Gesamtkosten je Zeiteinheit: $C_1 + C_2$ (exklusive variable Bestellkosten)
Sei M_1 der mittlere Lagerbestand im Lager 1, dann ist

$$\begin{aligned}
Q_1 &= nQ_2 \\
T_1 &= nT_2 \\
T_2 &= \frac{Q_2}{r} \\
C_1 &= \frac{K_1}{T_1} + h_1 \cdot M_1 \\
&= \frac{K_1}{nT_2} + h_1 \cdot M_1 \quad \text{(fixe Bestellkosten und Lagerungskosten je Zeiteinheit)} \\
C_2 &= \frac{rK_2}{Q_2} + \frac{h_2 Q_2}{2} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Der mittlere Lagerbestand M_1 berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}
T_2(n-1)Q_2 + T_2(n-2)Q_2 + \ldots T_2Q_2 + T_2 \cdot 0 &= nT_2M_1 \\
\Rightarrow M_1 = Q_2\frac{n(n-1)}{2n} &= Q_2\frac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{K_1}{n\frac{Q_2}{r}} + h_1\frac{n-1}{2}Q_2 \\
&= \frac{rK_1}{nQ_2} + Q_2h_1\frac{n-1}{2} \\
\Rightarrow C(Q_2, n) &= \frac{rK_1}{nQ_2} + Q_2h_1\frac{n-1}{2} + \frac{rK_2}{Q_2} + \frac{h_2Q_2}{2} \\
&= \frac{r}{Q_2}\left(\frac{K_1}{n} + K_2\right) + \frac{Q_2}{2}(\underbrace{h_2 - h_1}_{e_2} + n\underbrace{h_1}_{e_1}), \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

wobei e_1, e_2 die Echelon-Lagerungskosten je Mengen- und Zeiteinheit sind. Man kann diese als Lagerungskosten für den Mehrwert der Produkte, der in Stufe 2 erzeugt wird, interpretieren.

Minimum bestimmen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial Q} &= -\frac{r}{Q_2^2}\left(\frac{K_1}{n}+K_2\right)+\frac{ne_1+e_2}{2}=0\\ \Leftrightarrow Q_2^* &= \sqrt{\frac{2r(\frac{K_1}{n}+K_2)}{ne_1+e_2}}\end{aligned}$$

Dies ist eine Minimum.Wir setzen dies in 2.12 ein und erhalten

$$C(n)=\sqrt{2r}\cdot\sqrt{\frac{K_1}{n}+K_2}\cdot\sqrt{ne_1+e_2} \tag{2.13}$$

Um nun das n zu finden, welches unsere Kosten minimiert, betrachten wir

$$\begin{aligned}\arg\min C(n) &= \arg\min C^2(n)\\ \frac{\partial C^2(n)}{\partial n} &= 2rK_2e_1-\frac{2rK_1e_2}{n^2}=0\\ \Leftrightarrow n^2 &= \frac{K_1e_2}{K_2e_1}\\ n^* &= \sqrt{\frac{K_1e_2}{K_2e_1}}.\end{aligned}$$

Falls $n^*\in\mathbb{N}$ ist, dann kann C problemlos berechnet werden. Ansonsten vergleiche die Kosten und beachte, dass nur C_1 abhängig von n ist

$$\begin{aligned}C(\lfloor n^*\rfloor) &\leqslant C(\lceil n^*\rceil)=C(\lfloor n^*\rfloor+1)\\ \Leftrightarrow C_1(\lfloor n^*\rfloor) &\leqslant C_1(\lfloor n^*\rfloor+1)\\ \Leftrightarrow \frac{K_1r}{\lfloor n^*\rfloor Q_2}+\frac{h_1(\lfloor n^*\rfloor-1)Q_2}{2} &\leqslant \frac{K_1r}{(\lfloor n^*\rfloor+1)Q_2}+\frac{h_1\lfloor n^*\rfloor Q_2}{2}\\ \Leftrightarrow \frac{K_1r}{Q_2}\left(\frac{1}{\lfloor n^*\rfloor}-\frac{1}{(\lfloor n^*\rfloor+1}\right) &\leqslant \frac{h_1Q_2}{2}\\ \Leftrightarrow \frac{1}{\lfloor n^*\rfloor(\lfloor n^*\rfloor+1)} &\leqslant \frac{h_1Q_2^2}{2K_1r}=\frac{1}{(n^*)^2}\\ \Leftrightarrow \frac{n^*}{\lfloor n^*\rfloor} &\leqslant \frac{\lfloor n^*\rfloor+1}{n^*}\end{aligned}$$

und runde n^* auf falls „>“ bzw. ab falls „<“ in der letzten Ungleichung gilt (somit sind die Kosten minimal).Wir zeigen noch, dass $\frac{h_1Q_2^2}{2K_1r}=\frac{1}{(n^*)^2}$ ist. Es gilt

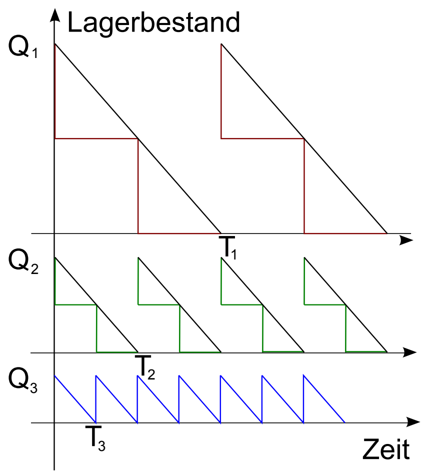
$$\begin{aligned}C(Q_2^*,n) &= C_1(n,Q_2^*)+\underbrace{C_2(n,Q_2^*)}_{C_2(Q_2^*)}\\ \arg\min_n C(Q_2^*,n) &= \arg\min_n C_1(n,Q_2^*)\\ \frac{\partial C_1(n,Q_2^*)}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{K_1r}{nQ_2^*}+\frac{h_1(n-1)Q_2^*}{2}\right)\\ &= \frac{-K_1r}{n^2Q_2^*}+\frac{h_1Q_2^*}{2}=0\\ \Leftrightarrow (n^*)^2 &= \frac{2K_1r}{h_1(Q_2^*)^2}.\end{aligned}$$

2.4 Mehrstufige Lagersysteme

Situation: N Stufen, Q_i... Losgröße in Stufe i, T_i... Zykluslänge in Stufe i, Rest wie eben mit folgenden

Annahmen:

- $K_i, i = 1, \dots N$ ... fixe Bestellkosten,
- h_i ... Lagerungskosten mit $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_N$,
- EOQ in der letzten Stufe,
- eine Produkteinheit von Stufe i wird benötigt um eine Produklteinheit in Stufe $i+1$ zu produzieren $\quad \forall i = 1, \dots N-1$,
- $Q_i = n_i Q_{i+1}, n_i \in \mathbb{N}$ und
- es sind keine Fehlmengen erlaubt .



Gesamtkosten=fixe Bestellkosten+ variable Bestellkosten+Lagerkosten, wobei die variablen Kosten für die Optimierung irrelevant sind.

Fixe Bestellkosten je Zeiteinheit: K_i in Stufe i für eine Periode der Länge T_i, also $\frac{K_i}{T_i}$ je Zeiteinheit. Weil

$$T_i = \frac{Q_i}{r}, \quad T_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{r} \quad \text{und}$$
$$Q_i = n_i Q_{i+1} \quad n_i \in \mathbb{N},$$

folgt

$$\begin{aligned} T_i r = Q_i &= n_i Q_{i+1} = n_i T_{i+1} r \\ \Leftrightarrow T_i &= n_i T_{i+1} \\ &= n_i n_{i+1} T_{i+2} \\ &= \ldots \\ &= n_i \cdots n_{N-1} T_N \\ &= p_i T_N, \end{aligned}$$

wobei $p_i = n_i n_{i+1} \cdots n_{N-1}$ $\forall i = 1, \ldots N-1, p_N = 1$. Für alle Stufen ergeben sich die Bestellkosten je Zeiteinheit aus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{T_i} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i T_N} \\ &= \frac{1}{T_N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i}. \end{aligned}$$

Lagerkosten je Zeiteinheit: In Stufe i gibt es einen mittleren Lagerbestand in $[0, T_i]$ von

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{(n_i - 1) Q_{i+1} T_{i+1} + (n_i - 2) Q_{i+1} T_{i+1} + \ldots + Q_{i+1} T_{i+1}}{T_i} \\ &= T_{i+1} \frac{(n_i - 1) + (n_i - 2) + \ldots + 1}{T_i} Q_{i+1} \\ &= \frac{T_{i+1} n_i}{T_i n_i} \cdot \frac{n_i - 1}{2} \cdot n_i Q_{i+1} \\ &= \frac{n_i - 1}{2} Q_{i+1}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} Q_i &= n_i Q_{i+1} \\ &= n_i n_{i+1} Q_{i+2} \\ &= \ldots \\ &= n_i \cdots n_{N-1} Q_N \\ &= p_i Q_N, \end{aligned}$$

erhält man die Lagerkosten je Zeiteinheit in Stufe i durch

$$h_i \frac{n_i - 1}{2} Q_{i+1} = h_i \frac{n_i - 1}{2} p_{i+1} Q_N.$$

Betrachtet man nun die Lagerkosten je Zeiteinheit für alle Stufen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&Q_N \sum_{i=1}^{N-1} h_i \frac{n_i - 1}{2} p_{i+1} + C_N \\
&= Q_N \left(h_1 \frac{n_1 - 1}{2} n_2 \cdots n_{N-1} + h_2 \frac{n_2 - 1}{2} n_3 \cdots n_{N-1} + \ldots + h_{N-1} \frac{n_{N-1} - 1}{2} + h_N \frac{1}{2} \right) \\
&= Q_N \left(h_1 \frac{p_1}{2} - h_1 \frac{p_2}{2} + h_2 \frac{p_2}{2} - h_2 \frac{p_3}{2} + \ldots + h_{N-1} \frac{p_{N-1}}{2} - h_{N-1} \frac{1}{2} + h_N \frac{1}{2} \right) \\
&= Q_N \left(h_1 \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2}(h_2 - h_1) + \ldots + \frac{p_{N-1}}{2}(h_{N-1} - h_{N-2}) + \frac{1}{2}(h_N - h_{N-1}) \right) \\
&= Q_N \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i e_i}{2} = r T_N \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i e_i}{2}.
\end{aligned}$$

Gesamtkosten je Zeiteinheit:

$$C(p_1, \ldots p_{N-1}, T_N) = \frac{1}{T_N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i} + r T_N \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i e_i}{2}$$

Diese Kosten sind zu minimieren. Wir haben somit folgendes zu lösen:

$$\begin{aligned}
(P) \quad & \min C(p_1, \ldots p_{N-1}, T_N) \\
\text{s.t. } & T_N \in \mathbb{R}^+ \\
& p_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \ldots N-1 \\
& p_i \geq p_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots N-1.
\end{aligned}$$

Dies ist NP-vollständig, daher modifizieren wir es zu

$$\begin{aligned}
(P1) \quad & \min C(p_1, \ldots p_{N-1}, T_N) \\
\text{s.t. } & T_N \in \mathbb{R}^+ \\
& p_i = 2^{l_i} \quad l_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall i = 1, \ldots N-1 \\
& p_i \geq p_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots N-1.
\end{aligned}$$

Satz 2.4.1. Roundy's 98 Prozent Approximation Property: Seien C_1^* und C^* die optimalen Zielfunktionswerte von $(P1)$ bzw. von (P), dann gilt $C_1^* - C^* \leq 0.02 C^*$.

Relaxation von (P) und $(P1)$:

$$\begin{aligned}
(P2) \quad & \min C(p_1, \ldots p_{N-1}, T_N) \\
\text{s.t. } & T_N \in \mathbb{R}^+ \\
& 1 \leq p_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots N-1 \\
& p_i \geq p_{i+1} \quad \forall i = 1, \ldots N-1
\end{aligned}$$

Aus der 3. Restriktion (Monotonie der p_i) folgt

$$\begin{aligned}
& Q_i = p_i Q_N = f p_{i+1} Q_N = f Q_{i+1} \quad \text{mit} f \geq 1 \\
\Rightarrow\ & Q_i \geq Q_{i+1}.
\end{aligned}$$

Dies wurde also nicht relaxiert. Die Simultanität des Lagersystems wurde relaxiert.

Approximatives Lösungsverfahren für $(P2)$**:**

Phase 1: Berechne $Q_i = \sqrt{\frac{2rK_i}{e_i}}$ als Lösung des EOQ-Modells der Stufe i.

$$c_i = \frac{rK_i}{Q_i} + \frac{e_i Q_i}{2}$$

Postprocessing (optional): Falls $Q_i = Q_{i+1}$ für ein $i \in \{1, \dots N-1\}$, dann lege die Stufen i und $i+1$ zusammen, erzeuge eine neue Stufe $(i, i+1)$ mit fixen Bestellkosten $K_i + K_{i+1}$ und Echelon-Lagerkosten $e_i + e_{i+1}$.

Phase 2: Initialisiere $L = \emptyset$ (LIFO) als Liste der zusammengelegten Lagerstufen.
$\bar{N} = N, \bar{K}_i = K_i, \bar{e}_i = e_i \ \forall i = 1, \dots N$

1.) Solange $\exists i \in \left\{1, \dots \bar{N}-1\right\} : \frac{\bar{K}_i}{\bar{e}_i} < \frac{\bar{K}_{i+1}}{\bar{e}_{i+1}}$ (Monotonieeigenschaft), lege Stufen i und $i+1$ zusammen und setze

$$\begin{aligned} L &:= L \cup \{i\}, \\ \bar{N} &:= \bar{N} - 1, \\ \bar{K}_i &:= \bar{K}_i + \bar{K}_{i+1}, \\ \bar{e}_i &:= \bar{e}_{i+1} \\ \bar{K}_j &:= \bar{K}_{j+1}, \\ \bar{e}_j &:= \bar{e}_{j+1} \quad \forall j > i. \end{aligned}$$

2a) $Q_i = \sqrt{\frac{2r\bar{K}_i}{\bar{e}_i}} \ \forall i = 1, \dots \bar{N}$
(nicht zusammengelegte Lager erfüllen die Monotonie sicher)

2b) Setze $\bar{N} := \bar{N} + 1$ und für $\forall i \in L$ (in LIFO-Reihenfolge) und $\forall j = \bar{N}, \dots i+1$

$$\bar{Q}_j = \bar{Q}_{j-1}, \bar{Q}_i = Q_i.$$

Setze

$$\begin{aligned} Q_i &:= \bar{Q}_i \quad \forall i = 1, \dots \bar{N} \quad \text{(zurück umbenennen)} \\ c_i &= \frac{rK_i}{Q_i} + \frac{e_i Q_i}{2} \quad \forall i = 1, \dots N \\ \underline{C} &:= \sum_{i=1}^{N} c_i. \end{aligned}$$

Output: Q_i und $\underline{C}$ (optimaler ZFW für $(P2)$).

Phase 3: Modifizierung der Lösung aus Phase 2 um Lösung für $(P1)$ zu erhalten.

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=1}^{N} \frac{rK_i}{p_i Q_N} + \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i p_i}{2} Q_N \\ &= \frac{r}{Q_N} \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i} + \frac{Q_N}{2} \sum_{i=1}^{N} e_i p_i \\ &= C_{EOQ}(Q_N), \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei die Bestellkosten des EOQ-Modells als $\sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i}$ und die Echelon-Lagerkosten als $\sum_{i=1}^{N} e_i p_i$ gegeben sind.

1.) Setze $Q_N^* = Q_N$ (aus Phase 2).

2a) $\forall i = N-1, \ldots 1$ betrachte Q_i aus Phase 2 und bestimme $m \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$2^m Q_{i+1}^* \leq Q_i \leq 2^{m+1} Q_{i+1}^*.$$

Falls

$$\frac{Q_i}{2^m Q_{i+1}^*} \leq \frac{2^{m+1} Q_{i+1}^*}{Q_i},$$

dann setze

$$\begin{aligned} m_i^* &= m \text{ und sonst} \\ m_i^* &= m + 1 \\ Q_i^* &= 2^{m_i^*} Q_{i+1}^*. \end{aligned}$$

2b) Setze

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i^* \quad \forall i = 1, \ldots N \quad \text{(ersetzt Lösung der Relaxation)}, \\ p_i &= 2^{m_i + m_{i+1} + \ldots m_{N-1}} \quad \forall i = 1, \ldots N, \\ Q_N^* &= \sqrt{\frac{2r \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{p_i}}{\sum_{i=1}^{N} p_i e_i}}. \end{aligned}$$

Letzteres gilt wegen 2.14. Wir optimieren hier für feste $p_1, \ldots p_{N-1}$ und tun so, als ob alles eine Lagerstufe wäre.

3.) Wiederhole 2) solange sich ein m_i^* für $i = 1, \ldots N-1$ ändert.

Output: Lösung $(p_1, p_2, \ldots p_{N-1}, Q_N^*)$ mit Kosten

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i K_i}{p_i Q_N^*} + \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i p_i}{2} Q_N^*.$$

Dies ist eine approximierte Lösung für $(P1)$.

Satz 2.4.2. Das oben beschriebene heuristische Verfahren terminiert nach $\log N$ Schritten und es gilt $\bar{C} - C^* \leq 0.06C^* \Rightarrow \bar{C} \leq 1.06C^*$.

Beispiel. $N = 4, r = 4000$

Stufe	K_i	h_i	e_i
1	250	0.5	0.5
2	6	0.55	0.05
3	30	3.55	3
4	110	7.55	4

Phase 2: Es ist

$$\frac{K_1}{e_1} = 500 \geq \frac{K_2}{e_2} = 120 \geq \frac{K_3}{e_3} = 10 < \frac{K_4}{e_4} = 27.5,$$

das heißt für $i = 3$ ist die Monotonieeigenschaft nicht erfüllt und die Stufen 3 und 4 werden zusammengelegt. Berechne die neuen Werte für $\bar{K}_j$ und $\bar{e}_j$ wie in 1.). Für diese ist die Monotonieeigenschaft erfüllt. Berechne daher Q_i und c_i wie in 2a.) bzw. 2b).

Stufe	K_i	e_i	Q_i	c_i
1	250	0.5	2000	1000
2	6	0.05	980	49
3	140	7	400	2800

Lösung von $(P2)$: $\underline{C} = \sum_{i=1}^{3} c_i = 3849$ mit obigen Q_i.
Phase 3: 1. Iteration

1.) $Q_3^* := Q_3 = 400$

2a.) i=2:

$$\begin{aligned} 2^m Q_3^* &\leq Q_2 \leq 2^{m+1} Q_3^* \\ 2^m 400 &\leq 980 \leq 2^{m+1} 400 \\ &\Leftrightarrow m = 1 \\ \frac{980}{2 \cdot 400} &\leq \frac{2^2 \cdot 400}{980} \\ &\Rightarrow m_2^* = m = 1 \\ Q_2^* &= 2^{m_2^*} Q_3^* = 2 \cdot 400 = 800 \end{aligned}$$

i=1:

$$\begin{aligned} 2^m Q_2^* &\leq Q_1 \leq 2^{m+1} Q_2^* \\ 2^m 800 &\leq 2000 \leq 2^{m+1} 800 \\ &\Leftrightarrow m = 1 \\ \frac{2000}{1600} &\leq \frac{3200}{2000} \\ &\Rightarrow m_1^* = m = 1 \\ Q_1^* &= 1600 \end{aligned}$$

2b)

$$p_3 = 1 \quad p_2 = 2^1 = 2 \quad p_1 = 2^2 = 4$$
$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2r\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{p_i}}{\sum_{i=1}^{N} p_i e_i}} = 425$$

2. Iteration der 3. Phase:

2a) i=2:

$$\begin{aligned}
2^m Q_3^* &\leq Q_2 \leq 2^{m+1} Q_3^* \\
2^m 425 &\leq 800 \leq 2^{m+1} 425 \\
\Leftrightarrow m &= 0 \\
\frac{800}{425} &\geq \frac{2 \cdot 425}{800} \\
\Rightarrow m_2^* &= m + 1 = 1 \\
Q_2^* &= 2^{m_2^*} Q_3^* = 2 \cdot 425 = 850
\end{aligned}$$

i=1:

$$\begin{aligned}
2^m Q_2^* &\leq Q_1 \leq 2^{m+1} Q_2^* \\
2^m 850 &\leq 1600 \leq 2^{m+1} 850 \\
\Leftrightarrow m &= 0 \\
\frac{1600}{850} &\geq \frac{1700}{1600} \\
\Rightarrow m_1^* &= m + 1 = 1
\end{aligned}$$

Da sich die m_i^* nicht ändern, können wir hier stoppen und die Q_i aus der ersten Iteration von Phase 2 bilden die optimalen Werte.

2.5 Ein stochastisches Ein-Periodenmodell

Annahmen:

- Es gibt eine Periode, für schnell alternde/verderbliche Güter (Obst, Zeitungen)
- fixe Bestellkosten K, variable Bestellkosten c je Mengeneinheit,
- $h > 0$ ... Lagerkosten je Zeit- und Mengeneinheit,
- $p > c$ ... Fehlmengenkosten je Zeit- und Mengeneinheit (sinnvoll, weil sonst wäre es optimal nichts zu produzieren),
- keine Lieferzeit,
- x ... Lagerbestand zu Periodenbeginn unmittelbar vor Bestellung,

- $u > 0 \ldots$ bestellte (produzierte) Menge zu Beginn der Planungsperiode,
- $y = x+u \ldots$ Lagerbestand unmittelbar nach der Bestellung (und Eintreten der bestellten Ware),
- $R \ldots$ Zufallsvariable der Nachfrage unmittelbar nach Eintreffen der Bestellten Menge u mit r als Realisierung dieser
  $r < y = x + u \Rightarrow$ Lagerkosten $h(x + u - r) = h(y - r)$
  $r > y = x + u \Rightarrow$ Fehlmengenkosten $p(r - (x + u)) = p(r - y)$ und
- $\Pi_r = P(R = r)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Nachfrage der Höhe r gibt.

Ziel: Minimierung der erwarteten Gesamtkosten, bei einer Nachfrage, die durch die Zufallsvariable R gegeben ist.

Wir unterscheiden 2 Fälle:
Fall 1: R diskret (Stückware), die erwarteten Gesamtkosten ergeben sich für alle $y \in \mathbb{N}_0$ aus

$$\begin{aligned} L(y) &= h\sum_{r=0}^{y}(y-r)\Pi_r + p\sum_{r=y+1}^{\infty}(r-y)\Pi_r \\ &= (h+p)\sum_{r=0}^{y}(y-r)\Pi_r + p\sum_{r=0}^{\infty}(r-y)\Pi_r. \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Des weiteren gilt für $\forall y \in \mathbb{N}_0$ folgendes

$$\begin{aligned} E(R) &= \sum_{r=0}^{\infty} r\Pi_r \qquad (2.16) \\ P(R \le r) = \Phi(r) &= \sum_{i=0}^{\lfloor r \rfloor}\Pi_i \quad \text{für } r \ge 0 \\ \int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r &= \int_0^y \sum_{i=0}^{\lfloor r \rfloor}\Pi_i \mathrm{d}r \\ &= \sum_{k=0}^{y-1}\int_k^{k+1}\sum_{i=0}^{\lfloor r \rfloor}\Pi_i \mathrm{d}r \\ &= \sum_{k=0}^{y-1}\sum_{i=0}^{k}\Pi_i \\ &= \Pi_0 + (\Pi_0 + \Pi_1) + \ldots + (\Pi_0 + \ldots + \Pi_{y-1}) \\ &= (y-0)\Pi_0 + (y-1)\Pi_1 + \ldots + (y-(y-1))\Pi_{y-1} \\ &= \sum_{r=0}^{y-1}(y-r)\Pi_r \qquad (2.17) \\ &= \sum_{r=0}^{y}(y-r)\Pi_r. \qquad (2.18) \end{aligned}$$

Setzt man 2.18 und 2.16 in 2.15 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} L(y) &= (h+p)\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r + p\underbrace{\sum_{r=0}^{\infty}(r-y)\Pi_r}_{E(R-y)} \\ &= (h+p)\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r + p(E(R)-y). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Fall 2: R stetig mit Dichtefunktion φ, es ist $\Phi(0)=0$. Außerdem erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^y (y-r)\varphi(r)\mathrm{d}r &= [(y-r)\Phi(r)]_0^y + \int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r \\ &= \int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Somit ergeben sich die erwarteten Gesamtkosten aus

$$L(y) = (h+p)\int_0^y (y-r)\varphi(r)\mathrm{d}r + p\underbrace{\int_0^\infty (r-y)\varphi(r)\mathrm{d}r}_{E(R-y)}, \quad y \geq 0 \tag{2.21}$$

$$\stackrel{2.20}{=} (h+p)\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r + p(E(R)-y).$$

Für $y<0$ setze $\Phi(y)=0$.

Für beide Fälle erhalten wir

$$L(y) = \begin{cases} (h+p)\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r + p(E(R)-y) & y \geq 0 \\ p(E(R)-y) & y < 0 \end{cases}. \tag{2.22}$$

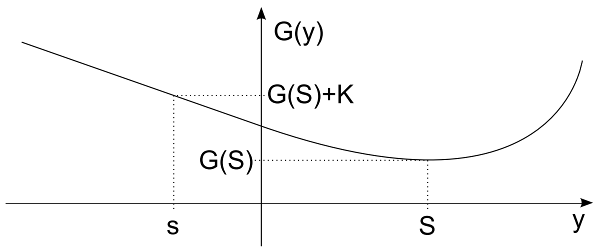
Minimale Lagerkosten: bestimmen wir in Abhängigkeit vom anfänglichen Lagerbestand x

$$\begin{aligned} C^*(x) &= \min_{u\geq 0}\{\delta(u)K + cu + L(x+u)\} \\ &= \min_{u\geq 0} w(x,u). \end{aligned}$$

Sei die optimale Bestellgröße $z^*(x) \in \arg\min_{u\geq 0} w(x,u)$ und sei

$$\begin{aligned} G(y) &:= cy + L(y) \\ \Rightarrow w(x,u) &= K + G(x+u) - cx \\ \lim_{y\to-\infty} G(y) &= \lim_{y\to-\infty} cy + L(y) \\ &= \lim_{y\to-\infty} cy + p(E(R)-y) \\ &= \lim_{y\to-\infty} \underbrace{(c-p)}_{<0} y + pE(R) \to \infty \quad \text{(Fehlmengenkosten bei } -\infty) \\ \lim_{y\to\infty} G(y) &\to \infty \quad \text{(analog, Lagerkosten bei } \infty). \end{aligned}$$

Da Φ monoton wachsend ist, folgt, dass $\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r$ konvex und die erste Ableitung davon $(\int_0^y \Phi(r)\mathrm{d}r)' = \Phi(y)$ monoton wachsend ist. Daraus folgt, dass $L(y)$ und somit auch $G(y)$ konvex sind.
Sei S die kleinste Minimalstelle von G auf $\mathbb{R}$. $S > 0$, da $G(y)$ monoton fallend und linear für $y < 0$ ist.



Fallunterscheidung:
Fall 1: Sei s die größte Zahl, für die $s \leq S$ und $G(s) \geq G(S) + K$ gilt (nehme den nächsten diskreten Wert). Bezeichne mit $C^+(x,u)$ die erwarteten Gesamtkosten für $u > 0$.

$$\begin{aligned} C^+(x,u) &:= w(x,u) \quad u > 0 \\ C^-(x,u) &:= C^-(x,0) = w(x,0) = L(x) = G(x) - cx \end{aligned}$$

1. Beobachtung: Für $x \geq s$ gilt

$$\begin{aligned} C^+(x,u) - C^-(x,u) &= (K + G(x+u) - cx) - (G(x) - cx) \\ &= K + G(x+u) - G(x) \geq 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

wegen folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} x \geq S \geq s : x + u \geq x& \\ \Rightarrow G(x+u) \geq G(x) &\quad \text{weil G mon. wachsend ist für Werte } > S \\ s \leq x \leq S :& \\ G(x) \leq G(s) = G(S) + K& \\ \leq G(x+u) + K &\quad \text{weil } S \text{ der minimale Punkt von } G \text{ ist.} \end{aligned}$$

Das heißt aus 2.23 folgt für $x \geq s$, dass $C^+(x,u) \geq C^-(x,u)$ und daher werden in diesem Fall die minimal erwarteten Gesamtkosten bei $u = 0$ erreicht.
2. Beobachtung: Für $x < s$ gilt

$$C^+(x,u_0) - C^-(x,u) < 0$$

für $u_0 = S - x$, weil

$$\underbrace{K - cx + G(x+u_0)}_{C^+(x,u_0)} - (\underbrace{G(x) - cx}_{C^-(x)}) = K + G(x+u_0) - G(x) < 0, \text{da}$$

$$\begin{aligned} G(x) > G(s) &= G(S) + K \\ &= G(u_0 + x) + K. \end{aligned}$$

Das heißt für $x < s$ werden die minimal erwarteten Gesamtkosten für $u_0 = S - x$ erreicht.
Fall 2: Sei $s \leq S$ so gewählt, dass s die größte Zahl (dadurch eindeutig) kleiner S ist, für die $G(s) = G(S) + K$ gilt.

Optimale Bestellpolitik: Bestellmenge und Kosten:

$$\begin{aligned} z^*(x) &= \begin{cases} S - x & x \leq s \\ 0 & x > s \end{cases} \\ C^*(x) = w(x, z^*(x)) &= \begin{cases} K - cx + G(S) & x \leq s \\ -cx + G(x) & x > s \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnung von S:
R stetig: Somit ist Φ stetig und auch G stetig, sowie differenzierbar und konvex, das heißt wir erhalten die Minimalstelle durch Differenzieren:

$$\begin{aligned} G'(S) &= (cS + L(S))' \\ &= c + L'(S) = 0 \\ \Leftrightarrow L'(S) &= -c \\ L'(S) = (h+p)\Phi(S) - p &= -c \\ \Leftrightarrow S &= \Phi^{-1}(\frac{p-c}{h+p}) = q_{\frac{p-c}{h+p}}(\Phi) \quad \text{(Quantil)} \end{aligned}$$

R diskret: Es gilt $S = \min\left\{u \in \mathbb{N}_0 : \Phi(u) \geq \frac{p-c}{h+p}\right\}$.

Berechnung von s:
$s \leq 0$: Hier gilt $G(s) = G(S) + K$ und somit

$$\begin{aligned} G(s) &= cs + L(s) = cs + p(E(R) - s) \\ &= (c-p)s + pE(R) = G(S) + K \\ \Leftrightarrow s &= \frac{G(S) + K - pE(R)}{c - p}. \end{aligned}$$

$s > 0$: Hier muss man s aus der Gleichung $G(s) = G(S) + K$ gegebenenfalls numerisch berechnen.
Anmerkung: Wann gilt $s < 0$?

$$\begin{aligned} G(0) &= c \cdot 0 + L(0) \\ &= p(E(R) - 0) = pE(R) \\ &\leq G(S) + K \\ &= G(s) \\ \Leftrightarrow s &< 0, \end{aligned}$$

da G bis 0 eine linear fallende Funktion ist.

2.6 Stochastische stationäre Mehrperiodenmodelle

Bemerkung. Diese nennt man auch Amow-Harris-Warshall-Modelle=AHW-Modelle.

Annahmen:

- Wir haben einen Zeitraum von n Perioden,
- $K \geq 0$ ... fixe Bestellkosten, $c \geq 0$ ... Stückpreise,
- $h \geq 0$... Lagerkosten je Zeit- und Mengeneinheit,
- $p \geq 0$ ... Fehlmengenkosten,
- $\alpha \in (0, 1)$ ... Diskontierungsfaktor,
- Nachfragen $R_1, \dots R_n$ in den Perioden $1, \dots n$ sind iid Zufallsvariablen mit Verteilungsdichte φ (stetig, bzw. falls φ diskret, dann alles mit Summen statt Integralen) und
- Lager- und Fehlmengenkosten gibt es analog wie im vorherigen Abschnitt.

Notationen. Es seien

- X_j... eine Zufallsvariable, die den Lagerbestand am Ende von Periode j bzw. am Anfang von Periode $j + 1$ (vor der Bestellung) darstellt,
- x_j... Realisierung von X_j,
- x_0... deterministischer Lagerbestand zu Beginn der 1. Periode,
- u_j... die zu Beginn von Periode j bestellte Menge,
- r_j... Realisierung der Nachfrage in Periode j und
- $x_j = \underbrace{x_{j-1} + u_j}_{y_j} - r_j \ \forall j = 1, \dots n$.

Erwartete Gesamtkosten:

$$L(y) = \begin{cases} (h + p) \int_0^y \Phi(r) \mathrm{d}r + p(E(R) - y) & y \geq 0 \\ p(E(R) - y) & y < 0 \end{cases}$$

Erwartete Kosten in Periode j:

$$K\delta(u_j) + cu_j + L(x_{j-1} + u_j)$$

Zielfunktion:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^{j-1} (K\delta(u_j) + cu_j + L(x_{j-1} + u_j)), \quad u_j \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots n$$

Seien $C_j^*(x_j)$ die minimalen erwarteten Kosten für die Stufen $j, j+1, \dots n$ diskontiert auf den Beginn der Periode j bei gegebenen Anfangsbestand x_j. Sei $G(y) := cy + L(y)$, dann sind die erwarteten Kosten in Periode j

$$K\delta(u_j) + cu_j + L(x_{j-1} + u_j) = K\delta(u_j) + G(x_{j-1} + u_j) - cx_{j-1}.$$

Bellmann'sche Funktionalgleichung:

$$
\begin{aligned}
C_j^*(x_{j-1}) &= -cx_{j-1} + \min_{u_j \geq 0} \left\{ K\delta(u_j) + G(x_{j-1}+u_j) + \alpha \int_0^\infty C_{j+1}^*(x_{j-1}+u_j-r_j)\varphi(r_j)\mathrm{d}r_j \right\} \qquad (2.24)\\
&= -cx_{j-1} + \min_{u_j \geq 0} w(x_{j-1}, u_j) \quad \forall j = 1, \dots n
\end{aligned}
$$

Es ist $z_1^*, \dots z_n^*$ die optimale Bestellpolitik, wobei

$$z_j^*(x_{j-1}) = \arg\min_{u_j \geq 0} w(x_{j-1}, u_j)$$

und $C_1^*(x_0)$ sind die minimal zu erwartenen Kosten des ursprünglichen Problems. Für C_{n+1}^* gibt es 2 Fälle:

A) $C_{n+1}^* = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,

B) $C_{n+1}^* = \begin{cases} -cx & x > 0 \quad \text{Verkaufen am Markt} \ \Rightarrow \ \text{Gewinn} \\ -cx & x \leq 0 \quad \text{müssen Produkte besorgen um Nachfrage zu erfüllen} \ \Rightarrow \text{Kosten} \end{cases}$

Wir definieren

$$\bar{G}(y) := (1-\alpha)cy + L(y) = G(y) - \alpha cy.$$

Bemerkung. Modell B ist realistischer und hat geringeren Rechenaufwand. Analog wie für G kann man zeigen, dass $\bar{G}$ konvex, linear fallend für $y < 0$ und $\lim_{y \to \pm\infty} \bar{G}(y) \to \infty$ ist.

Sei

$$
\begin{aligned}
&\bar{C}_j^*(x_{j-1}) := C_j^*(x_{j-1}) + cx_{j-1} - cE(R)(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-j+1}) \quad \forall j = 1, \dots n \qquad (2.25)\\
&\bar{C}_{n+1}^*(x_n) = 0 \quad \forall x_n \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Gleichung 2.24 lässt sich mit dem $\bar{C}_j$ und $\bar{G}$ in folgende Gleichung transformieren:

$$\bar{C}_j^*(x_{j-1}) = \min_{u_j \geq 0} \left\{ K\delta(u_j) + \bar{G}(x_{j-1}+u_j) + \alpha \int_0^\infty \bar{C}_{j+1}^*(x_{j-1}+u_j-r_j)\varphi(r_j)\mathrm{d}r_j \right\}. \qquad (2.26)$$

Sei

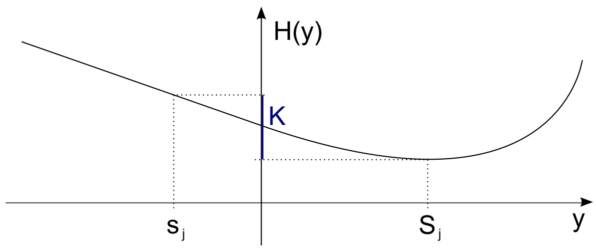
$$
\begin{aligned}
H_j(y) &= G(y) + \alpha \int_0^\infty C_{j+1}^*(y-r)\varphi(r)\mathrm{d}r \qquad (2.27)\\
\bar{H}_j(y) &= \bar{G}(y) + \alpha \int_0^\infty \bar{C}_{j+1}^*(y-r)\varphi(r)\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

Aus 2.24 bzw. 2.26 wird

$$C_j^*(x) = -cx + \min_{u_j \geq 0} \{K\delta(u) + H_j(x+u)\} \quad \forall j = 1, \dots n, \qquad (2.28)$$

$$\bar{C}_j^*(x) = \min_{u_j \geq 0} \{K\delta(u) + \bar{H}_j(x+u)\} \quad \forall j = 1, \dots n. \qquad (2.29)$$

Lösungsweg Modell A: Sei S_j und s_j , sodass S_j die kleinste Minimalstelle von H_j auf $\mathbb{R}$ und s_j die größte Zahl kleiner S_j mit $H_j(s_j) = H_j(S_j) + K$ ist.



Analog wie im vorhergehenden Abschnitt ist

$$z_j^*(x) = \begin{cases} S_j - x & x < s_j \\ 0 & x \geq s_j \end{cases}, \tag{2.30}$$

das heißt, dass s_j ein optimaler Bestellpunkt und S_j eine optimale Bestellgröße in Periode $j, j = 1, \ldots n$ ist. 2.30 eingesetzt in 2.28 ergibt die optimal erwarteten Kosten

$$C_j^*(x) = \begin{cases} -cx + K + H_j(S_j) & x < s_j \\ -cx + H_j(x) & x \geq s_j \end{cases}.$$

Algorithmus. Lagerhaltung: (s, S)-Politik im stochastischen Modell A
Input: $n, K, h, p, c, \alpha, \varphi, x_0$
Schritt 1: Setze $j := n, H_j(y) := G(y) = cy + L(y)\ \forall y \in \mathbb{R}$.
Schritt 2: Bestimme die kleinste Minimalstelle S_j von H_j auf $\mathbb{R}$ und die größte Zahl $s_j \leq S_j$ mit $H_j(s_j) = H_j(S_j) + K$.
Schritt 3: Bestimme

$$z_j^*(x) = \begin{cases} S_j - x & x < s_j \\ 0 & x \geq s_j \end{cases} \text{ und}$$

$$C_j^*(x) = \begin{cases} -cx + K + H_j(S_j) & x < s_j \\ -cx + H_j(x) & x \geq s_j \end{cases}.$$

Schritt 4: Falls $j = 1$ ist, dann terminiere, sonst setze $j := j - 1$, bestimme H_j wie in 2.27 und gehe zu Schritt 2.
Output: $C_1^*(x_0), s_j, S_j \quad \forall j = 1, \ldots n$

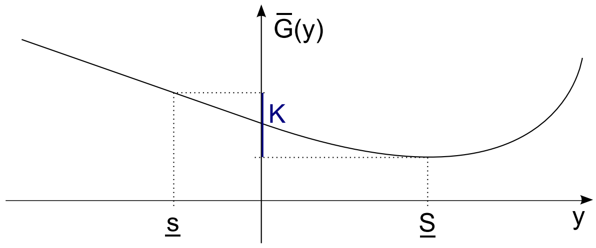
Bemerkung. Wenn $K = 0$ ist, dann erhält man eine (S_j, S_j)- Politik $(s_j = S_j)$. Man kann zeigen, dass $S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_n$.

Lösungsweg Modell B: In diesem Modell können unabhängig vom Periodenindex j untere und obere Grenzen für s_j und S_j angegeben werden. Sei $\underline{S}$ die kleinste Minimalstelle von $\bar{G}$ und $\underline{s}$ die größte Zahl $\underline{s} \leq \underline{S} : \bar{G}(\underline{s}) = \bar{G}(\underline{S}) + K$. Es gilt $\underline{S} \geq 0$, weil $\bar{G}$ linear und monoton fallend ist für $y < 0$.
Sei $\bar{S} \geq \underline{S}$ die kleinste Zahl mit

$$\bar{G}(\bar{S}) = \bar{G}(\underline{S}) + \alpha K. \tag{2.31}$$

Die Existenz dieser beruht auf Grund der Eigenschaften von $\bar{G}$.
Sei $\bar{s} \in [\underline{s}, \underline{S}]$ die größte Zahl mit

$$\bar{G}(\bar{s}) = \bar{G}(\underline{S}) + (1 - \alpha)K. \tag{2.32}$$



Für $\alpha = 1$ gilt $\bar{s} = \underline{S}$. Außerdem ist S_j die Minimalstelle von $\bar{H}_j$ auf $[\underline{S}, \bar{S}]$ genau dann, wenn S_j die Minimalstelle von H_j auf $\mathbb{R}$ ist (Fakultativ, HÜ Analysis).
Analog zu A sei s_j die größte Zahl kleinergleich S_j, für die $H_j(s_j) = H_j(S_j) + K$ ist. Aus $S_j \in [\underline{S}, \bar{S}]$ folgt $s_j \in [\underline{s}, \bar{s}]$.

Optimale Bestellpolitik: (analog A)

$$\bar{z}_j^*(x) = \begin{cases} S_j - x & x < s_j \\ 0 & x \geq s_j \end{cases} \tag{2.33}$$

Minimal erwarteten Kosten:

$$\bar{C}_j^*(x) = \begin{cases} K + \bar{H}_j(S_j) & x < s_j \\ \bar{H}_j(x) & x \geq s_j \end{cases} \tag{2.34}$$

Auch hier gilt $\bar{H}_n = \bar{G}, S_n = \underline{S}$.

Aus dem Algorithmus für Modell A erhalten wir einen Algorithmus für Modell B, in dem alle Größen durch die $\bar{\cdot}$-Gegenstücke ersetzt werden und S_j, s_j in $[\underline{S}, \bar{S}]$ bzw. $[\underline{s}, \bar{s}]$ statt in $\mathbb{R}$ gesucht werden.

Bemerkung. Für $K = 0$ folgt, dass sich eine (S_j, S_j)-Politik ergibt. Die Bestellpunkte sind gleich der Bestellgrenze. Es ist $\underline{s} = \bar{s} = \underline{S} = \bar{S}$.

2.7 Unendlich-periodische stochastische stationäre Lagerhaltungsprobleme

Frage: Warum bzw. wann betrachtet man unendlich-periodische Modelle?

1.) Ein sehr langer Planungshorizont kann mit einem unendlichen gleich gesetzt werden.

2) Als Approximation für ein endliches Problem, wenn die Anzahl der Perioden groß ist. Ist n groß, so ist der Aufwand für endlich-periodische Modelle sehr groß. Bei einem unendlich-periodischen Modell ist die Approximation ungenau, aber immer noch so genau, dass sich die Approximation rentiert.

Betrachten: Problem, dass bei Stufe $n-j+1$ beginnt und j Stufen/Perioden besitzt (Modell A). Seien C^*_{n-j+1} die minimal erwarteten Kosten über die Perioden $n-j+1, \dots n$ diskontiert auf den Beginn von Periode $n-j+1$.
Seien $C^+_j(x) := C^*_{n-j+1}(x)$ die minimal erwarteten Kosten eines j-stufigen Problems mit Anfangszustand x diskontiert auf den Beginn der 1. Periode dieser j Perioden.

Satz 2.7.1. Sei $\alpha \in (0,1)$ ein Diskontierungsfaktor. Die Folge $C^*_j(x)$ konvergiert gegen die minimal diskontierten erwarteten Kosten $C^*(x)$ des unendlich-stufigen Problems. Die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem endlichen Intervall aus $\mathbb{R}$. C^* genügt der folgenden Funktionalgleichung:

$$C^*(x) = -cx + \min_{u \geq 0} \left\{ K\delta(u) + G(x+u) + \alpha \int_0^\infty C^*(x+u-r)\varphi(r)\mathrm{d}r \right\}.$$

Bemerkung. Im Fall, dass $\alpha = 1$ (keine Diskontierung) muss $\sum_{j=1}^\infty C^+_j(x_j)$ nicht konvergieren. In dem Fall werden die durchschnittlichen erwarteten Kosten pro Periode minimiert $\left(\lim_{j\to\infty} \frac{C^+_j(x)}{j}\right)$.

Satz 2.7.2. Wenn $\alpha = 1$ ist, dann existiert der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} \frac{C^+_j(x)}{j}$ und ist gleich den minimal durchschnittlich erwarteten Kosten je Periode im unendlich-stufigen Problem. Man hat gleichmäßige Konvergenz für alle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Für diesen und den vorhergehenden Abschnitt sind die Beweise in [2] und [3] zu finden.

Folgerungen:

- Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt, dass auch beim unendlich-stufigen Problem eine optimale (s^*, S^*)-Politik existiert, sodass

$$z^*_j(x) = \begin{cases} S^* - x & x < s^* \\ 0 & x \geq s^* \end{cases}, \tag{2.35}$$

  und s^*, S^* den Gleichungen

$$\begin{aligned} \underline{s} \leq s^* \leq \bar{s} \\ \underline{S} \leq S^* \leq \bar{S} \end{aligned}$$

  mit $\underline{s}, \bar{s}, \underline{S}, \bar{S}$ wie beim endlich-stufigen Problem genügen.

- Für $\alpha < 1$ erhalten wir bei z^* die minimal erwarteten Gesamtkosten, für $\alpha = 1$ erhalten wir bei z^* die minimal erwarteten durchschnittlichen Kosten pro Periode.

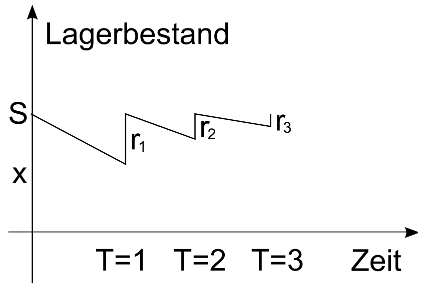
- Falls $K = 0$ ist, so gilt $s^* = S^*$ wie beim endlich-stufigen Problem (da $\underline{s} = \bar{s} = \underline{S} = \bar{S}$).

- $s^* = S^* = \underline{S}$ ist die kleinste Minimalstelle von $\bar{G}$ mit

$$\Phi(\bar{S}) = \Phi(S^*) = \frac{p - (1-\alpha)c}{p+h}, \tag{2.36}$$

  wobei Φ die Verteilungsfunktion der Nachfrage ist.

- 2.36 kann auch ohne Limesprozess ermittelt werden:
  Sei $K = 0$ und es existiere eine optimale (S, S)-Bestellpolitik. Ziel ist die Bestimmung von S. Seien $C_x(S)$ die Gesamtkosten für den Angangsbestand x.



$$
\begin{aligned}
C_x(S) &= \underbrace{c \cdot (S - x) + L(S)}_{\text{1. Periode}} + \underbrace{\alpha(cr_1 + L(S))}_{\text{2. Periode}} + \ldots + \underbrace{\alpha^{i-1}(cr_{i-1} + L(S))}_{i-\text{te Periode}} + \ldots \\
E(C_x(S)) &= c \cdot (S - x) + L(S) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i + E(c \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i R_i) \quad (E(R_i) = E(R)) \\
&= c \cdot (S - x) + L(S) \frac{1}{1 - \alpha} + E(R)c \frac{1}{1 - \alpha} \\
\min_{S \geq 0} E(C_x(S)) &= \min_{s \geq 0} \left\{ c \cdot (S - x) + L(S) \frac{1}{1 - \alpha} + E(R)c \frac{1}{1 - \alpha} \right\}
\end{aligned}
$$

Da $L(S)$ konvex und differenzierbar ist, ist auch $E(C_x(S))$ konvex und differenzierbar und wir erhalten durch Differenzieren die gesuchte Minimalstelle

$$
\begin{aligned}
c + L'(S) \frac{1}{1 - \alpha} &= 0 \\
\Leftrightarrow L'(s) &= (p + h)\Phi(S) - p = -c(1 - \alpha) \\
\Leftrightarrow \Phi(S) &= \frac{p - c(1 - \alpha)}{p + h} \quad \text{(wie 2.36).}
\end{aligned}
$$

Kapitel 3

Multikriterielle Optimierung

3.1 Einleitung und Definitionen

Beispiel. Autokauf

Kriterien ↓ / Alternativen →	VW	Opel	Ford	Toyota	Ziel
Preis in Tsd. Euro	31	29	30	27	↘
Verbrauch in l/100 km	7.2	7.0	7.5	7.8	↘
Leistung in KW	65	55	58	55	↗

Lösung: Wir betrachten verschiedene Modelle:
Modell 1: Gewichtung der Zielfunktionen

$$\min_{\lambda_i \geq 0} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f_i$$
$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$$

Modell 2: Lexikographische Optimierung: Reihung der Kriterien: $\min \{f_3(x) : \arg\min \{f_2(x) : \arg\min \{f_1(x) :$

Modell 3: Pareto-Optimierung: suche $x^* \in X$ (Menge der Alternativen), sodass

$$\nexists y \in X : f_i(y) \leq f_i(x^*) \quad i = 1, \dots 3 \text{ und}$$
$$f_{i_0}(y) < f_{i_0}(x^*) \text{ für irgendein } i_0 \in \{1, 2, 3\}$$

Notation: Für so ein y sagen wir y dominiert x^*. x^* ist also pareto-optimal genau dann, wenn kein y existiert, dass x^* dominiert.
Alle Autos sind pareto-optimal.
Ford: Es ist zwar $30 > 27$, aber es ist $7.5 < 7.8$ (Toyota),
es ist zwar $7.5 > 7$, aber $58 > 55$ (Opel)
und es ist zwar $58 < 65$, aber $30 < 31$ (VW), das heißt Toyota, Opel und VW dominieren Ford nicht.

Modell 4: Jede Alternative x hat mehrere Nachteile. Sei $f_i(x)$ das Maß der Unzufriedenheit der Alternative x bzgl. Nachteil i, $i = 1, \dots n$.

$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ bildet das Problem auf den Entscheidungsraum ab. Man betrachtet

$$\min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x).$$

Definition 3.1.1. Der Input des MCOP (multicriteria opimization problem) ist eine Struktur der Form $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid \theta \mid (\mathbb{R}^P, \preceq)$, wobei

- $X \ldots$ Menge der zulässigen Lösungen ist,
- $X \to \mathbb{R}^Q : x \mapsto (f_1(x), \ldots f_Q(x))$ ist die Kriteriumsfunktion,
- $\mathbb{R}^Q \ldots$ heißt Kriteriumsraum,
- $\theta : \mathbb{R}^Q \to \mathbb{R}^P \ldots$ ist die Abbildung des Problems,
- $\mathbb{R}^P \ldots$ heißt Entscheidungsraum und
- $\preceq \ldots$ ist eine reflexive und transitive Relation im $\mathbb{R}^P$.

Hierbei wird folgendes gesucht:

$$x^* \in X, \text{ sodass } \nexists y \in X \setminus x^* \text{ mit } \theta(f(x^*)) \succeq \theta(f(y)).$$

x^* heißt optimale/minimale Lösung und $f(x^*) \in \mathbb{R}^Q$ heißt optimaler Wert.

$$Opt((X, f, \mathbb{R}^Q) \mid \theta \mid (\mathbb{R}^P, \preceq))$$

ist die Menge der optimalen Lösungen.

Beispiele für Quasi-Ordnungsrelationen im $\mathbb{R}^n$

Nr.	Notation	Definition	Name
1	$x \ll y$	$x_i < y_i \ \forall i$	strikte komponentenweise Ordnung
2	$x \leq y$	$x_i \leq y_i \ \forall i, x \neq y$	komponentenweise Ordnung
3	$x \leq_{lex} y$	$\exists k \in \{1, \ldots n\}$: $x_i = y_i, i = 1, \ldots k-1, x_k < y_k$	lexikographische Ordnung
4	$x \leq_{mo} y$	$\max x_i \leq \max y_i, x \neq y$	Maximalordnung

- Partialordnung: 1-4
- konnex: 4
- Totalordnung: 3

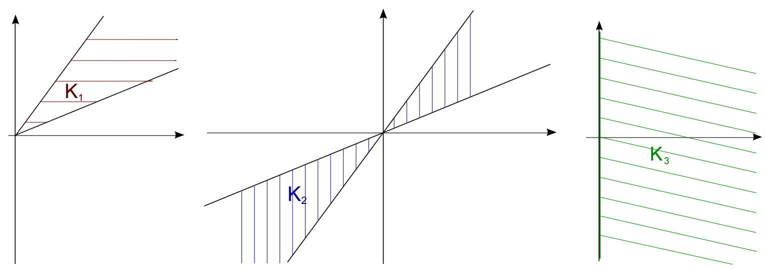
Zu Modell 1: $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid \theta_{GS} \mid (\mathbb{R}, \leq)$, GS... Gewichtete Summe, $x \in \mathbb{R}^Q \mapsto \sum_{i=1}^Q \lambda_i x_i \in \mathbb{R}$
Zu Modell 2: $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, \preceq_{lex})$
Zu Modell 3: $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, \leq)$ mit $\leq$ als die komponentenweise Ordnung

Definition 3.1.2. $K \subseteq \mathbb{R}^n$

- ... heißt Kegel, wenn $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K \ \forall 0 < \lambda \in \mathbb{R}$,
- ... heißt trivialer Kegel, wenn $K = \emptyset$ oder $K = \mathbb{R}^n$,

- ... heißt konvexer Kegel, wenn
  $\forall x, y \in K, \forall \lambda > 0, \forall \alpha \in [0,1] : \lambda x \in K \wedge \alpha x + (1-\alpha)y \in K$,
- ... ist ein spitzer Kegel $\Leftrightarrow$ K ist ein Kegel und $x \in K \setminus \{0\} \Rightarrow -x \notin K$.

Beispiel. K_1 konvex, nicht trivial, spitz,
K_2 nicht konvex, nicht trivial, nicht spitz,
K_3 konvex, nicht spitz (wegen y Achse)



Satz 3.1.3. Sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}^n$ und

$$K_{\leq} := \{y - x \mid x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y\}. \tag{3.1}$$

Sei dies kompatibel mit der skalaren Multiplikation und mit der Addition, d.h.

$$x \leq y \wedge \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$x \leq y \wedge c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + c \leq y + c \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt $K_{\leq}$ wie in 3.1 ist ein konvexer und spitzer Kegel.

Beweis: HÜ

Satz 3.1.4. Sei $\preceq$ eine binäre Relation auf $\mathbb{R}^n$, die mit der skalaren Multiplikation und mit der Addition kompatibel ist. Dann gilt

1.) $0 \in K_{\preceq}$ (wie in 3.1) $\Leftrightarrow \preceq$ ist reflexiv,

2.) $K_{\preceq}$ ist konvex, falls $\preceq$ transitiv ist und

3.) $K_{\preceq}$ ist spitz, falls $\preceq$ antisymmetrisch ist.

Beweis: HÜ

Bemerkung. Man kann auch einen Kegel verwenden um Ordnungsrelationen zu definieren: K ...Kegel und

$$x \preceq_K x \Leftrightarrow y - x \in K. \tag{3.2}$$

Satz 3.1.5. Sei K ein Kegel im $\mathbb{R}^n, \preceq_K$ wie in 3.2. Dann gilt $\preceq_K$ ist kompatibel mit der skalaren Multiplikation und der Addition in $\mathbb{R}^n$ und weiters

a.) $0 \in K \Rightarrow \preceq_K$ ist reflexiv,

b.) K konvex $\Rightarrow \preceq_K$ transitiv und

c.) K spitz $\Rightarrow \preceq_K$ antisymmetrisch.

Beweis: HÜ

Pareto-Optimalität und Effizient: Existenzsätze und Eigenschaften

Betrachten: $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^P, <)$ mit $<$ als die komponentenweise Ordnung, $x, y \in \mathbb{R}^Q, x < y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ \forall i, x \neq y, Y := f(X) \subseteq \mathbb{R}^Q$.

Definition 3.1.6. $x^* \in X$ heißt pareto-optimal, wenn

$$\nexists x \in X : f(x) < f(x^*), \text{ das heißt}$$
$$\nexists x \in X : f_i(x) \leq f_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots Q \text{ und } f(x) \neq f(x^*).$$

Falls x^* pareto-optimal, dann heißt $f(x^*) \in Y$ effizient. Falls $f(x_1) < f(x_2), x_1, x_2 \in X$, dann sagen wir x_1 dominiert x_2.

Notationen. $X_{par} := \{x \in X \mid x \text{ ist pareto-optimal}\}$ ... Menge der pareto-optimalen Lösungen, $Y_{eff} := \{f(x) \mid x \in X_{par}\}$

Aquivalente Definitionen: x^* ist pareto-optimal $\Leftrightarrow$

1.) $\nexists x \in X : f_i(x) \leq f_i(x^*) \ \forall i = 1, \dots Q \wedge \exists j \in \{1, \dots Q\} : f_j(x) < f_j(x^*)$ oder

2.) $\nexists x \in X : f(x) - f(x^*) \in -\mathbb{R}^Q_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}^Q_- = \{v \in \mathbb{R}^Q : v_i < 0 \ \forall i = 1, \dots Q\}$ oder

3.) $f(x) - f(x^*) \in \mathbb{R}^Q \setminus \mathbb{R}^Q_- = \mathbb{R}^Q_+ \setminus \{0\} \ \forall x \in X$ oder

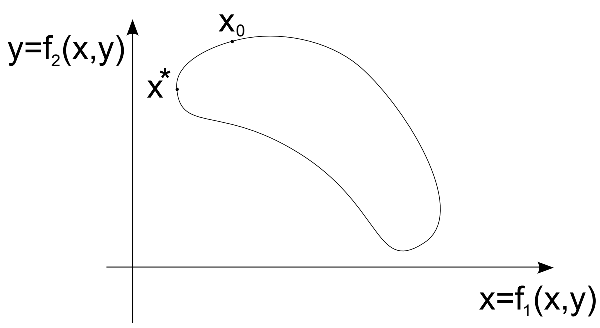
4.) $f(X) \cap (f(x^*) - \mathbb{R}^Q_+) = f(x^*)$ oder

5.) $\nexists f(x) \in f(X) \setminus \{f(x^*)\} : f(x) \in f(x^*) - \mathbb{R}^Q_+$ oder

6.) $\forall x \in X : f(x) \leq f(x^*) \Rightarrow f(x) = f(x^*)$.

Beispiel.

$$Q = 2,$$
$$X \subseteq \mathbb{R}^2, X = f(X) = Y,$$
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f_1(x, y) = x,$$
$$f_2(x, y) = y$$



$(f(x_0) - \mathbb{R}^2_+) \cap X \neq \{x_0\} \overset{4.)}{\Rightarrow} x_0$ nicht pareto-optimal

$(f(x^*) - \mathbb{R}^2_+) \cap X \neq \{x^*\} \overset{4.)}{\Rightarrow} x^*$ ist pareto-optimal

$X_{par} = Y_{eff}$

Ziel: Analyse der Existenz und der Eigenschaften von X_{par}.

Beispiel. Auch wenn X konvergiert und $Y = f(X)$ konvergiert, können X_{par} und Y_{eff} leer sein.

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1 \le 1 \text{ und} - \sqrt{1-x_1^2} < x_2 \le 0 \text{ falls } -1 < x_1 \le 0;$$
$$\sqrt{1-x_1^2} \le x_2 \le 0 \text{ falls } 0 < x_1 \le 1\}$$
$$X_{par} = Y_{eff} = \emptyset$$

Falls wir $-\sqrt{1-x_1^2} \le x_2 \le 0$ zulassen für $0 \le x_1 \le 1 \Rightarrow X_{par} = \{(0,-1)\}$.

Lemma 3.1.7. $Y_{eff} = (Y + \mathbb{R}^Q_+)_{eff} = \left\{y + a \mid y \in Y, a \in \mathbb{R}^Q_+\right\}$.

Lemma 3.1.8. $Y_{eff} \subseteq Rd(Y)$ (Rand von Y).

Korollar 3.1.9. $Y \subseteq \mathbb{R}^Q$ offen $\Rightarrow Y_{eff} = \emptyset$.

Lemma 3.1.10. $(Y_1 + Y_2)_{eff} \subseteq (Y_1)_{eff} + (Y_2)_{eff}$.

Beweis: $y_1 + y_2 : y_1 \in (Y_1)_{eff}, y_2 \in (Y_2)_{eff}$
Annahme:

$$\exists \bar{y}_1 \in (y_1 - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y_1 \Leftrightarrow y_1 - \bar{y}_1 \in \mathbb{R}^Q_+ \text{ und}$$
$$\exists \bar{y}_2 \in (y_2 - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y_2 \Leftrightarrow y_2 - \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^Q_+$$

Aus diesen Annahmen folgt:

$$y_1 + y_2 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \in \mathbb{R}^Q_+$$
$$\Rightarrow \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \in (y_1 + y_2 - \mathbb{R}^Q_+) \cap (Y_1 + Y_2)$$

Widerspruch!

□

Lemma 3.1.11. $(\alpha Y)_{eff} = \alpha Y_{eff} \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \ge 0$.

Definition 3.1.12. Sei $\le$ eine reflexive und transitive Relation in A. $(A, \le)$ heißt induktiv geordnet, falls jede Kette M in A ein minimales Element m_μ besitzt. Eine Kette ist eine Menge von Elementen, die in Relation zueinander stehen.
m_μ heißt minimal in $M \Leftrightarrow \forall x \in M, x \le m_\mu \Rightarrow m_\mu \le x$.

Lemma 3.1.13. Lemma von Zorn: Sei $\le$ eine reflexive und transitive Relation auf A, sodass $(A, \le)$ induktiv geordnet ist. Dann gibt es ein minimales Element in A.

Satz 3.1.14. Borwein, 1983: Sei $Y \neq \emptyset, Y \in \mathbb{R}^Q$. Angenommen $\exists y_0 \in Y$, sodass

$$Y^0 = \{y \in Y \mid y \le y_0\} = (y_0 - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y$$

kompakt ist, dann gilt $Y_{eff} \neq \emptyset$.

Beweis: Wir zeigen: Y ist kompakt
$\Rightarrow H$ Kette in Y_0 besitzt untere Schranke bezüglich $\leq \Rightarrow (Y^0, \leq)$ induktiv geordnet
$\overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow}$ es existiert ein minimales Element $y^* \in Y^0$
$\Rightarrow y^* \in Y_{eff}$.

Sei $\left\{y^{(\alpha)} \mid \alpha \in A\right\}$ eine Kette in $(Y^0, \leq)$, wobei $\leq$ eine Ordnungsrelation ist. Wir zeigen, dass

$$\left\{y^{(\alpha)} \mid \alpha \in A\right\}$$

eine untere Schranke besitzt. Sei

$$B := \{a \subseteq A \mid a \text{ endlich}\}$$

die Menge der endlichen Teilmengen.
Für alle $a \in B \quad \exists y^{(a)}$ als minimales Element aus $\left\{y^{(\alpha)} \mid \alpha \in a\right\}, y^{(a)} \in Y^0$.

$$Y_\alpha := \left\{y^{(\alpha)} - \mathbb{R}_+^Q\right\} \cap Y^0 \quad \forall \alpha \in A$$

(1) Y^0 ist kompakt $\Leftrightarrow Y^0$ ist abgeschlossen und beschränkt.
(2) $y^{(\alpha)} - \mathbb{R}_+^Q$ ist abgeschlossen.
Aus (1) und (2) folgt, dass Y_α kompakt ist, da es abgeschlossen und beschränkt ist.

$$\forall a \in B \text{ gilt } \bigcap_{\alpha \in a} Y_\alpha \neq \emptyset$$

da a endlich und $y^{(a)} \in \bigcap_{\alpha \in a} Y_\alpha$.

Für kompakte Mengen gilt: Y ist kompakt und für $(Y_i)_{i \in I}$ (Familie von abgeschlossenen Teilmengen von Y mit nichtleeren Schnitt $\bigcap_{i \in J} Y_i \; \forall J \subseteq I, J$ endlich) folgt

$$\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset.$$

(Äquivalent zur Definition von Kompaktheit: jede offene Überdeckung enthält eine endliche Teilüberdeckung.)
Mit Y^0 in der Rolle von Y und $Y_\alpha, \alpha \in A$ in der Rolle von $(Y_i)_{i \in I}$ folgt

$$\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \emptyset.$$

Sei

$$y' \in \bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} [(y^{(\alpha)} - \mathbb{R}_+^Q) \cap Y^0]$$
$$\Rightarrow y' \in \cap (y^{(\alpha)} - \mathbb{R}_+^Q) \cap Y^0,$$

das heißt $y' \in Y^0$ und dominiert $y^{(\alpha)} \; \forall \alpha \in A$.
$\Rightarrow y'$ ist eine untere Schranke für $\left\{y^{(\alpha)} \mid \alpha \in A\right\}$.

$\Rightarrow$ Jede beliebige Kette besitzt eine untere Schranke.
$\overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow} \exists y^* \in Y^0$ minimales Element.
Wir zeigen noch $y^* \in Y_{eff}$:
Annahme:

$$\begin{aligned} & y^* \notin Y_{eff} \\ \Rightarrow & \exists \bar{y} \in Y : \bar{y} < y^* \\ \Rightarrow & \bar{y} \in (y^* - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y \subseteq Y^0 \cap Y = Y^0 \end{aligned}$$

Widerspruch zur Minimalität von $y^* \in Y^0 \Rightarrow Y_{eff} \neq \emptyset$.

□

Definition 3.1.15. $Y \subseteq \mathbb{R}^Q$ heißt $\mathbb{R}^Q_+$-kompakt, falls jede offene Überdeckung von Y von der Form $(y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)^C_{\alpha \in A}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Bemerkung. Dies ist weniger als kompakt. Aus Kompaktheit folgt die $\mathbb{R}^Q_+$-Kompaktheit, aber die Umkehrung gilt nicht.

Satz 3.1.16. Corley, 1980: Falls $Y \neq \emptyset$ und Y $\mathbb{R}^Q_+$-kompakt ist, dann folgt $Y_{eff} \neq \emptyset$ (nicht konstruktiv).

Definition 3.1.17. $Y \subseteq \mathbb{R}^Q$ heißt $\mathbb{R}^Q_+$-semikompakt, falls $\forall y \in Y$ gilt, dass $(y - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y$ kompakt ist.

Lemma 3.1.18. Ist $Y \neq \emptyset$ und Y $\mathbb{R}^Q_+$-semikompakt, dann folgt, dass $Y_{eff} \neq \emptyset$.

Bemerkung. Aus $Y \subseteq \mathbb{R}^Q_+$ ist $\mathbb{R}^Q_+$-semikompakt folgt, dass Y $\mathbb{R}^Q_+$-kompakt ist, da $(y - \mathbb{R}^Q_+) \cap Y$ kompakt ist für alle y.
Sei $((y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)^C)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von Y. Es gilt

$$\begin{aligned} Y &\subseteq \bigcup_{\alpha \in A} (y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)^C \\ &= (y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)^C \cup \bigcup_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}} (y^{(\alpha_0)} - \mathbb{R}^Q_+)^C. \end{aligned}$$

Außerdem sind $(y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)$ und

$$Y_1 := Y \cap (Y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)$$

kompakt und $(y^{(\alpha)} - \mathbb{R}^Q_+)_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}}$ ist eine Überdeckung.
$\Rightarrow$ Es existiert eine endliche Teilüberdeckung für Y_1, die mit $(y^{(\alpha_0)} - \mathbb{R}^Q_+)^C$ eine endliche Teilüberdeckung für Y liefert.

Frage: Welche Anforderungen sollen an X bzw. $f : X \to \mathbb{R}^Q$ gestellt werden, sodass $X_{par} \neq \emptyset$ gilt?

Definition 3.1.19. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^Q$ heißt $\mathbb{R}^Q_+$-halbstetig, wenn

$$f^{-1}(y - \mathbb{R}^Q_+) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq y\} \quad \forall y \in \mathbb{R}^Q$$

abgeschlossen ist.

Beispiel. $Q = 1 : f^{-1}((-\infty, y])$ abgeschlossen $\forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f$ linksstetig.

Lemma 3.1.20. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^Q$. f ist $\mathbb{R}^Q_+$-halbstetig $\Leftrightarrow$ $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linksstetig ist $\forall i = 1, \dots Q$, wobei $f(x) = (f_1(x), \dots f_Q(x))$ ist.

Lemma 3.1.21. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ kompakt und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^Q$ sei $\mathbb{R}^Q_+$-halbstetig, dann ist $Y = f(X)$ $\mathbb{R}^Q_+$-kompakt.

Satz 3.1.22. Sei $X \in \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ kompakt und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^Q$ sei $\mathbb{R}^Q_+$-halbstetig, dann ist $X_{par} \neq \emptyset$.

Beweis: Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, dass Y $\mathbb{R}^Q_+$-kompakt ist. $Y \neq \emptyset$, weil $X \neq \emptyset \Rightarrow Y_{eff} \neq \emptyset, Y_{eff} = f(X_{par}) \Rightarrow X_{par} \neq \emptyset$.

□

Bemerkung. Alle Ergebnisse dieses Abschnitts gelten analog auch für einen konvexen, abgeschlossenen, spitzen nichttrivialen Kegel K und die dazugehörige Ordnungsrelation $K_{\leq}$ statt $\mathbb{R}^Q_+$ als Kegel mit der komponentenweise Ordnung in $\mathbb{R}^Q$.

3.2 Schwache und strikte pareto-optimale Lösungen

Definition 3.2.1. $x^* \in X$ heißt schwach pareto-optimal

$$\Leftrightarrow \nexists x \in X : f_i(x) < f_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots Q.$$

$y = f(x^*) \in Y$ heißt schwach effizient.

Notationen. $X_{w-par} := \{x \in X \mid x \text{ ist schwach pareto-optimal}\}$,
$Y_{w-eff} := f(X_{w-par})$ (w... weakly)

Definition 3.2.2. $x^* \in X$ heißt strikt pareto-optimal

$$\Leftrightarrow x^* \in X_{par}, \nexists x \in X : x \neq x^*, f_i(x) = f_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots Q.$$

$y = f(x^*) \in Y$ heißt strikt effizient.

Notationen. $X_{s-par} := \{x \in X \mid x \text{ ist strikt pareto-optimal}\}$,
$Y_{s-eff} := f(X_{s-par})$

Beobachtung: Strikte Pareto-Optimalität entspricht der Eindeutigkeit der optimalen Lösung falls $Q = 1$. Es ist

$$X_{s-par} \subseteq X_{par} \subseteq X_{w-par},$$
$$Y_{s-eff} \subseteq Y_{eff} \subseteq Y_{w-eff}.$$

3.3 Eigentliche Pareto-Optimialität und eigentliche Effizienz

Definition 3.3.1. Geoffrion, 1968: $x^* \in X$ heißt eigentlich pareto-optimal, falls $x \in X_{par}$ und $\exists M > 0$, sodass für alle $i, j \in \{1, \dots Q\}$ und für alle $x \in X$, für die gilt, dass $f_i(x) < f_i(x^*)$ und $f_j(x^*) < f_j(x)$, folgt

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M.$$

$y = f(x^*)$ heißt eigentlich effizient.

Notationen. $X_{p-par} := \{x \in X \mid x \text{ ist eigentlich pareto-optimal}\}$,
$Y_{p-eff} := f(X_{p-par}) \quad (p \dots \text{proper})$

Beispiel.

$$\begin{aligned}
&X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq x_1\right\} \\
&f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \\
&f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto x_2 \\
&Y = f(X) = X
\end{aligned}$$

Z.B. zeigen wir, dass $P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1)$ nicht eigentlich pareto-optimal sind.

$$\begin{aligned}
P_1 = x^* &= (x_1^*, x_2^*) = (1, 0) \\
x &= (1 - z, z^2), z \in (0, 1)
\end{aligned}$$

sind zulässig. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{f_1(x^*) - f_1(x)}{f_2(x) - f_2(x^*)} &= \frac{1 - (1 - z)}{z^2} \\
&= \frac{1}{z} \xrightarrow[z \to 0]{} \infty.
\end{aligned}$$

Wir lassen z gegen 0 gehen, damit $x \to x^*$. Es wird jedes M überschritten und daher gilt $P_1 \notin X_{p-par}$.

$$\begin{aligned}
P_2 = (x_1^+, x_2^+) = x^+ &= (0, 1) \text{ und} \\
x &= (x_1, \sqrt{1 - x_1^2}), x_1 < 1
\end{aligned}$$

sind zulässig. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{f_2(x^+) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x^+)} &= \frac{\sqrt{1 - x_1^2} - 1}{0 - x_1} \\
\lim_{x_1 \to 0} \frac{\sqrt{1 - x_1^2} - 1}{0 - x_1} &= \lim_{x_1 \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}}(-2x_1)}{-1} \qquad \text{(l'Hospital)} \\
&= \lim_{x_1 \to 0} \frac{2x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} \to 0 \\
\Rightarrow \frac{f_2(x^+) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x^+)} &\to \infty.
\end{aligned}$$

Es wird jedes M überschritten und daher gilt $P_2 \notin X_{p-par}$.

Satz 3.3.2. Geoffrion: Sei $\lambda_i > 0 \ \forall i = 1, \dots Q, \sum_{i=1}^{Q} = 1$ und sei x^* eine optimale Lösung von

$$\min_{x \in X} \left\{ \sum_{I=1}^{Q} \lambda_i f_i(x) \right\},$$

dann ist x^* eine eigentlich pareto-optimale Lösung von

$$(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, \leq).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass x^* pareto-optimal ist.
Annahme: x^* ist nicht pareto-optimal.
Dann $\exists x \in X, i_0 \in \{1, \dots Q\} : f_i(x) \leq f_i(x^*) \ \forall i = 1, \dots Q, f_{i_0}(x) < f_{i_0}(x^*)$. Wir multiplizieren dies mit den entsprechenden λ_i und summieren auf:

$$\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x) < \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x^*).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $x^* \Rightarrow x^*$ ist pareto-optimal.
Wir zeigen $x^* \in X_{p-par}$.
Annahme: $x^* \notin X_{p-par}$, das heißt $\forall M > 0 \quad \exists i, j \in \{0, \dots Q\}, \exists x \in X$, sodass für $f_i(x) < f_i(x^*) \wedge f_j(x^*) < f_j(x)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} &> M \\ f_i(x^*) - f_i(x) &> M(f_j(x) - f_j(x^*). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sei

$$M := (Q-1) \max_{1 \leq i,j \leq Q} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \geq \frac{\lambda_j}{\lambda_i}.$$

Setzen wir dies in 3.3 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_i(x^*) - f_i(x) &> (Q-1) \max_{1 \leq i,j \leq Q} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} (f_j(x) - f_j(x^*) \\ f_i(x^*) - f_i(x) &> (Q-1) \frac{\lambda_j}{\lambda_i} (f_j(x) - f_j(x^*) \quad j \neq i. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir multiplizieren mit $\frac{\lambda_i}{Q-1}, Q \geq 2$ und summieren auf für alle $j \neq i$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq i}^{Q} \lambda_j (f_j(x) - f_j(x^*) &< \sum_{j=1, j \neq i}^{Q} \frac{\lambda_i}{Q-1} (f_i(x^*) - f_i(x)) \\ &= (Q-1) \frac{\lambda_i}{Q-1} (f_i(x^*) - f_i(x)) \\ &= \lambda_i (f_i(x^*) - f_i(x)) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^{Q} \lambda_j f_j(x) + \lambda_i f_i(x) < \lambda_i f_i(x^*) + \sum_{j=1, j \neq i}^{Q} \lambda_j f_j(x^*)$$

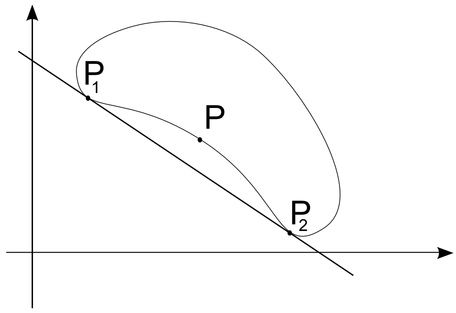
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{Q} \lambda_j f_j(x) < \sum_{j=1}^{Q} \lambda_j f_j(x^*).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $x^* \Rightarrow x^* \in X_{par}$.

□

Bemerkung. Die Bedingungen des vorhergehenden Satzes sind nicht notwendig. Wir zeigen dies anhand des folgenden Beispiels.

Beispiel. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f = id(\mathbb{R}^2)$
P_1 und P_2 sind pareto-optimal und eigentlich pareto-optimal.



Wir suchen für fixe $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$\min_{(x_1,x_2)\in X} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda_1\lambda_2}(x) &:= f_{\lambda_1\lambda_2}(x_1, x_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

P_1, P_2 sind nach Geoffrion eigentlich pareto-optimal. $P \in X_{p-par}$ aus geometrischen Überlegungen.

Frage: Existieren $(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, sodass

$$P \in \arg\min_{(x_1,x_2)\in X} \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\}?$$

Das geht nicht, denn die Geraden könnten immer weiter geschoben werden. Problem ist die Nicht-Konvexität der Menge (bzw. zulässigen Menge).

Satz 3.3.3. Geoffrion: Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f_i : X \to \mathbb{R}$ konvex für alle $i = 1, \dots Q$. Definiere A° als die Menge der inneren Punkte von A, dann ist

$$x^* \in X_{p-par} \text{ für } (X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, \leq)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ, \text{ sodass } x^* \in \arg\min_{x\in X} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x).$$

(Die Bedingung $\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i = 1$ ist für die Optimierung unerheblich und kann daher weggelassen werden.)

Satz 3.3.4. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei konvex und $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sein konvex. Wenn das System $\{h_i(x) < 0 \mid i = 1, \dots Q\}$ keine Lösungen in X besitzt, dann existiert ein $\lambda_i > 0, i \in \{1, \dots Q\}$ mit $\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i = 1$, sodass für alle $x \in X$ gilt

$$\sum_{i=1}^{Q} h_i(x)\lambda_i \geq 0.$$

Beweis: Siehe [4].

Beweis: von Satz 3.3.3.
„$\Longrightarrow$ “: Satz 3.3.2
„$\Longleftarrow$ “: $x^* \in X_{p-par}$, dann $\exists M > 0 : \forall i, j \in \{1, \dots Q\}, \forall x \in X$ für die $f_i(x) < f_i(x^*), f_j(x^*) < f_j(x)$ ist, gilt, dass

$$\frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(x^*)} \leq M \tag{3.6}$$

$$\Leftrightarrow f_i(x) + M f_j(x) \geq f_i(x^*) + M f_j(x^*) \quad \forall i \neq j. \tag{3.7}$$

Somit besitzen die Gleichungen $f_i(x) + M f_j(x) < f_i(x^*) + M f_j(x^*)$ $\forall i \neq j$ keine zulässigen Lösungen in X.
Wende Satz 3.3.4 für die Systeme

$$\begin{aligned} f_i(x) &< f_i(x^*) \\ f_i(x) + M f_j(x) &< f_i(x^* + M f_j(x^*) \quad \forall i \neq j \\ (h_i &= f_i(x) - f_i^*(x) \quad \text{und} \\ h_j &= f_i(x) - f_i^*(x) + M(f_j(x) - f_j(x^*)) \quad \text{sind konvex}) \end{aligned}$$

an.
$\exists \lambda_j^i \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ$ mit $\sum_{j=1}^Q \lambda_j^i = 1$, sodass für alle $x \in X$ gilt

$$\sum_{j \neq i} [\lambda_j^i M(f_j(x) - f_j(x^*)) + \lambda_j^i (f_i(x) - f_i(x^*))] + \lambda_i^i (f_i(x) - f_i(x^*)) \geq 0. \tag{3.8}$$

Aus 3.8 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^Q \lambda_j^i f_i(x) + \sum_{j \neq i} \lambda_j^i M f_j(x) - \left(\sum_{j=1}^Q \lambda_j^i f_i(x^*) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x^*) \right) &\geq 0 \\ f_i(x) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) \geq f_i(x^*) + M \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x^*) \quad &\forall x \in X, \forall i. \end{aligned}$$

Wir summieren über alle i und vertauschen anschließend die Indizes i und j:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^Q f_i(x) + M \sum_{i=1}^Q \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) &\geq \sum_{i=1}^Q f_i(x^*) + M \sum_{i=1}^Q \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x^*) \\ \sum_{i=1}^Q (1 + M \sum_{j \neq i} \lambda_i^j) f_i(x) &\geq \sum_{i=1}^Q (1 + M \sum_{j \neq i} \lambda_i^j) f_i(x^*). \end{aligned}$$

Setze $\hat{\lambda}_i = \left(\sum_{j \neq i} \lambda_i^j \right) M + 1 > 0$ und $x^* \in \arg\min \left\{ \sum \hat{\lambda}_j f_i(x) \mid x \in X \right\}$.

□

3.4 Die Skalarisierungsmethode

Wir betrachten das Pareto-MCOP $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, <)$.

Frage: Wann kann dieses Problem als skalarisiertes Problem min $\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x)$ gelöst werden?

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^Q$ und

$$Opt(\lambda, Y) := \{y^* \in Y \mid \langle \lambda, y^* \rangle \leq \langle \lambda, y \rangle \quad \forall y \in Y\},$$

wobei $\langle \lambda, y \rangle = \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i y_i$ ist. Wir definieren

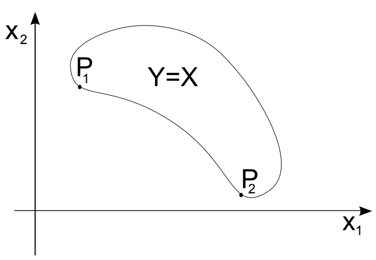
$$\begin{aligned} S(Y) &:= \bigcup_{\lambda \in (\mathbb{R}^Q)^\circ} Opt(\lambda, Y), \\ S_0(Y) &:= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^Q \setminus \{0\}} Opt(\lambda, Y) \end{aligned}$$

und es gilt $S(Y) \subseteq S_0(Y)$.

Bemerkung. $\lambda \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ$ bedeutet, dass $\lambda_i \neq 0 \ \forall i$ und
$\lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\}$ bedeutet, dass $\lambda \neq (0, 0 \ldots 0)$, aber $\lambda = (0, 1, 0 \ldots 0, 1)$ erlaubt ist.

Beispiel.

$$\begin{aligned} Q &= 2, \\ (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) &= (x_1, x_2), \\ Opt(\lambda, Y) &= \{P_1, P_2\} \end{aligned}$$

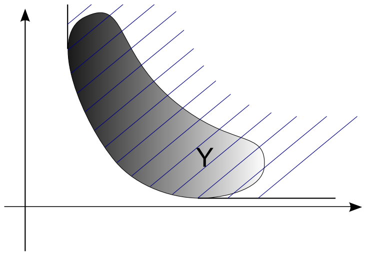


Definition 3.4.1. $Y \subseteq \mathbb{R}$ heißt $\mathbb{R}_+^Q$-konvex, falls

$$Y + \mathbb{R}_+^Q := \left\{ y + d \mid y \in Y, d \in \mathbb{R}_+^Q \right\}$$

konvex ist.

Beispiel. Y ist nicht konvex, aber $Y + \mathbb{R}_+^Q$ ist konvex $\Rightarrow$ Y ist $\mathbb{R}_+^Q$-konvex.



Satz 3.4.2. Es gilt $S(Y) \subseteq Y_{eff}$.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 3.3.2, also

$$S(Y) \subseteq f(X_{p-par}) \subseteq f(X_{par}) = Y_{eff}.$$

$\square$

Satz 3.4.3. Es gilt $Y_{eff} \subseteq S_0(Y)$, falls Y $\mathbb{R}^Q_+$-konvex ist.

Beweis: Sei $y^* \in Y_{eff}$, dann gilt wegen Lemma 3.1.7 $y^* \in (Y + \mathbb{R}^Q_+)_{eff}$ und daher

$$(Y + \mathbb{R}^Q_+) \cap (-\mathbb{R}^Q_+) = \{y^*\}$$
$$(Y + \mathbb{R}^Q_+ - y^*) \cap (-\mathbb{R}^Q_+) = \{0\}\,.$$

Sei $S_1 := Y + \mathbb{R}^Q_+ - y^*$. Dies ist konvex, da Y $\mathbb{R}^Q_+$-konvex ist. Sei $S_2 := -\mathbb{R}^Q_+$ auch konvex. Sei $RI\ldots$ das relative Innere, dann gilt

$$RI(S_1) \cap RI(S_2) \subseteq S_1 \cap S_2 = \{0\}\,.$$

Da $0 \notin I(S_2)$, gilt $RI(S_1) \cap RI(S_2) \neq \emptyset$. Der Seperationssatz impliziert $\exists \lambda \in \mathbb{R}^Q \setminus \{0\}$:

$$\inf_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle \geq \sup_{z \in S_2} \langle \lambda, z \rangle \text{ und}$$
$$\sup_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle \geq \inf_{z \in S_2} \langle \lambda, z \rangle.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\inf_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle &= \inf_{y \in Y, d \in \mathbb{R}^Q_+} \langle \lambda, y + d - y^* \rangle \\ &\leq \langle \lambda, y^* + 0 - y^* \rangle = 0 \\ \sup \langle \lambda, z \rangle &\leq \inf \langle \lambda, z \rangle \leq 0.\end{aligned}$$

Falls $\lambda_{i_0} < 0$ ist, dann setze $\bar{z} = (0, \ldots, \underbrace{-1}_{i_0}, 0, \ldots 0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sup_{z \in -\mathbb{R}^Q_+} \langle \lambda, z \rangle &\geq \langle \lambda, \bar{z} \rangle \\ &= -\lambda_{i_0} > 0.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch und daher gilt $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots Q$.
Für alle $y \in Y$ und alle $d \in \mathbb{R}^Q_+$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \underbrace{y + d - y^*}_{\in S_1} \rangle &\geq \inf_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle \\ &\geq \sup_{z \in S_2} \langle \lambda, z \rangle = 0, \end{aligned}$$

da alle Komponenten von z kleinergleich 0 sind und eines gleich 0 ist. Die Ungleichung gilt auch für $d = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda, y - y^* \rangle &\geq 0 \quad \forall y \in Y \\ \Leftrightarrow \langle \lambda, y \rangle &\geq \langle \lambda, y^* \rangle \quad \forall y \in Y \\ &\Rightarrow y^* \in Opt(\lambda, Y) \\ &\Rightarrow y^* \in S_0(Y). \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.4. Sei $\{y^*\} = Opt(\lambda, y)$ für $\lambda \in \mathbb{R}^Q_+ \setminus \{0\}$, dann gilt $y^* \in Y_{eff}$.

Beweis: HÜ durch Widerspruch

Bemerkung. Aus Satz 3.4.2 und Satz 3.4.3 folgt: $S(Y) \subseteq Y_{eff} \subseteq S_0(Y)$ für $\mathbb{R}^Q_+$-konvexe Mengen Y (für zweite Inklusion). Die Inklusionen sind im Allgemeinen echt.

3.4.1 Die Skalarisierung und die schwache Effizienz

Satz 3.4.5. Es gilt $S_0(Y) \subseteq Y_{w-eff}$.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{R}^Q_+ \setminus \{0\}$ mit $\lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots Q$ und $y^* \in Opt(\lambda, y)$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i y_i \quad \forall y = (y_i) \in Y.$$

Annahme: $y \notin Y_{w-eff}$, dann folgt

$$\begin{aligned} &\exists y' \in Y : y'_i < y_i^* \quad \forall i = 1, \ldots Q \\ &\Rightarrow \sum \lambda_i y'_i < \sum \lambda_i y_i^*. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $y^* \in Opt(\lambda, y)$.

□

Satz 3.4.6. Sei Y $\mathbb{R}^Q_+$-konvex, dann gilt $S_0(Y) = Y_{w-eff}$.

Beweis: Mit Satz 3.4.5 bleibt nur $Y_{w-eff} \subseteq S_0(Y)$ zu zeigen. Sei $y^* \in Y_{w-eff}$, daraus folgt

$$\begin{aligned} \nexists y' \in Y : y'_i &< y_i^* \quad \forall i \\ \Rightarrow \nexists y' + \alpha \in Y + \mathbb{R}^Q_+ : (y' + \alpha)_i &< y_i^* \quad \forall i \\ \Rightarrow (Y + \mathbb{R}^Q_+ - y^*) \cap (-(\mathbb{R}^Q_+)^\circ) &= \emptyset. \end{aligned}$$

(Nimmt man an, dass $(y' + \alpha - y_i^*)_i < 0$, so gelangt man zu einem Widerspruch.)
Aus dem Seperationssatz folgt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^Q \setminus \{0\} : 0 \geq \inf_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle \geq \sup_{z \in S_2} \langle \lambda, z \rangle. \tag{3.9}$$

Zeige

$$\inf_{y \in Y} \langle \lambda, y + d - y^* \rangle \leq \langle \lambda, y^* + 0 - y^* \rangle = 0.$$

Falls $\lambda_{i_0} < 0$ gelten würde, setze $\bar{z} = (-\varepsilon, -\varepsilon, \ldots, -1, -\varepsilon, \ldots - \varepsilon)$, sodass

$$\langle \lambda, \bar{z} \rangle = -\lambda_{i_0} - \varepsilon \sum_{i \neq i_0} \lambda_i > 0$$

(wählen die ε klein genug). Somit gilt $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$.
Wir zeigen $y^* \in Opt(\lambda, y)$ ($\Rightarrow y^* \in S_0(Y)$):

$$\sup_{z \in -(\mathbb{R}_+^Q)^\circ} \langle \lambda, z \rangle = \sup_{z \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ} \langle \lambda, -z \rangle \geq 0,$$

weil, wenn $-\varepsilon < 0$, dann gilt mit K die Anzahl der λ_i, die nicht 0 sind, dass

$$\begin{aligned}
\lambda_1 z_1 + \ldots \lambda_Q z_Q &\geq -\varepsilon \\
\lambda_i z_i &\geq -\frac{\varepsilon}{K} \\
\Leftrightarrow z_i &\geq -\frac{\varepsilon}{K\lambda_i} \quad \forall i : \lambda_i \neq 0 \\
\langle \lambda, y + 0 - y^* \rangle &\geq \inf_{z \in S_1} \langle \lambda, z \rangle \\
&\geq \sup \ldots \geq 0 \\
\Rightarrow \langle \lambda, y \rangle &\geq \langle \lambda, y^* \rangle \quad \forall y \in Y.
\end{aligned}$$

□

Zusammenfassung:
Skalarisiertes Problem $\Longrightarrow$ MCOP:
x^* ist optimal für $\min_{x \in X} \sum_{i=1}^Q \lambda_i f_i(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^Q$.

1.) $\lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\} \Rightarrow x^* \in X_{w-par}$ (Satz 3.4.6),

2.) $\lambda \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ \Rightarrow x^* \in X_{par}$ (Satz 3.4.2),

3.) $\lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\}$ und x^* eindeutig $\Rightarrow x^* \in X_{s-par}$ (Satz 3.4.4)

MCOP $\Longrightarrow$ Skalarisiertes Problem:
X ist konvex und f_i ist konvex für alle $i = 1, \ldots Q$. Sei $x^* \in X_{w-par} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\} : x^*$ optimal für
$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^Q \lambda_i f_i(x)$ (Satz 3.4.6).

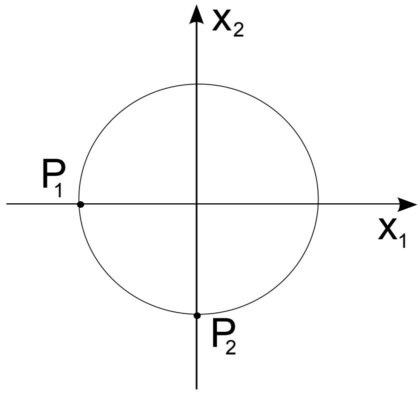
3.4.2 Die Skalarisierung und die eigentliche Pareto-Optimalität

Satz 3.4.7. Sei Y $\mathbb{R}^Q_+$-konvex, dann gilt $Y_{p-eff} \subseteq S(Y)$.

Bemerkung. Wir wissen, dass $S(Y) \subseteq Y_{p-eff}$ und somit folgt insgesamt $S(Y) = Y_{p-eff}$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} Y = X &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\} \\ X_{par} &= Y_{eff} \\ Y_{p-eff} &= Y_{eff} \setminus \{(-1,0),(0,-1)\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S(Y) = &\bigcup_{\lambda \in (\mathbb{R}^2_+)^\circ} Opt(\lambda, Y), \\ P_1 \in &\arg\min_{z \in Y} \langle \underbrace{(1,0)}_{\notin (\mathbb{R}^Q_+)^\circ}, z\rangle, \\ P_2 \in &\arg\min_{z \in Y} \langle \underbrace{(1,0)}_{\notin (\mathbb{R}^Q_+)^\circ}, z\rangle \end{aligned}$$

Wir wissen, dass für beliebige Mengen Y

$$S(Y) \subseteq Y_{p-eff} \subseteq Y_{w-eff}$$

und dass für $\mathbb{R}^Q_+$-konvexe Mengen Y

$$S(Y) = Y_{p-eff} \subseteq Y_{eff} \subseteq Y_{w-eff} = S_0(Y).$$

gilt.

Satz 3.4.8. Hartley, 1981: Sei $Y \neq \emptyset, \mathbb{R}^Q_+$-konvex und $\mathbb{R}^Q_+$-abgschlossen, dann gilt

$$S(Y) \subseteq Y_{p-eff} \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(S(Y)) = cl(Y_{p-eff}),$$

wobei $cl(A)$ der Abschluss von A ist.
Das heißt es ist $Y_{eff} \setminus Y_{p-eff} \subseteq cl(Y_{p-eff}) \setminus Y_{p-eff}$ (der Gap zwischen Y_{eff} und Y_{p-eff} ist nicht beliebig groß, nur abhängig von Y_{p-eff}).

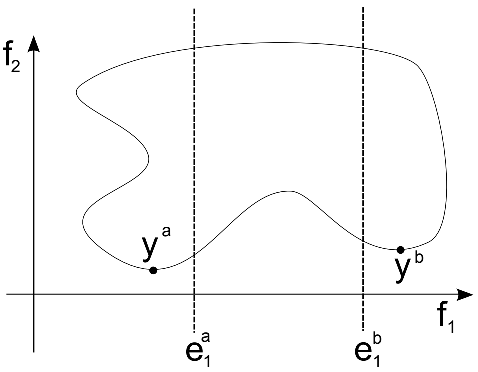
3.5 Andere Methoden der Pareto-Optimierung

3.5.1 Die ε-Constraint-Methode

Idee: Ersetze $\min_{x \in X} f_1(x), \ldots f_Q(x)$ durch

$$\begin{aligned} (P_k(\varepsilon)): \quad & \min f_k(x) \\ & s.t. f_i(x) \leq \varepsilon_i \quad \forall i \neq k \\ & x \in X \end{aligned}$$

Beispiel. $\varepsilon^a = (e_1^a, e_2^a); \varepsilon^b = (e_1^b, e_2^b)$
(y^a, y^b Optimallösung)



$$\begin{aligned} (P_2(\varepsilon^a)) \quad & : \min f_2(x) \\ \text{s.t. } & f_1(x) \leq e_1^a \\ & x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_2(\varepsilon^b)): \quad & \min f_2(x) \\ \text{s.t. } & f_1(x) \leq e_1^b \\ & x \in X \end{aligned}$$

Satz 3.5.1. Sei $\hat{x}$ optimal für $P_k(\varepsilon)$ für ein $k \in \{1, \ldots Q\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}^Q$, dann gilt $\hat{x} \in X_{w-par}$.

Beweis: Falls $\hat{x} \notin X_{w-par}$, dann $\exists x' \in X : f_i(x') < f_i(\hat{x}) \leq \varepsilon_i \ \forall i$. Daraus folgt x' ist zulässig für $P_k(\varepsilon)$ und $f_k(x') < f_k(\hat{x})$ und somit wäre $\hat{x}$ nicht optimal, weil x' eine bessere Lösung wäre. Widerspruch!

□

Satz 3.5.2. Sei $\hat{x}$ eindeutig optimal für $P_k(\varepsilon)$ für $k \in \{1, \ldots Q\}$, dann gilt $\hat{x} \in X_{s-par}$.

Beweis: Annahme: $\hat{x} \notin X_{s-par}$, das heißt $\exists x \in X : f_j(x) < f_j(\hat{x}) \ \forall j$. Somit gilt $f_j(x) \leq f_j(\hat{x}) \leq \varepsilon_j$ (da $\hat{x}$ optimal für $P_k(\varepsilon)$) für alle $j \neq k$ und für k gilt $f_k(x) < f_k(\hat{x}) \leq \varepsilon_k$. Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ für $P_k(\varepsilon)$.

□

Satz 3.5.3. Sei $\hat{x} \in X$. Dann gilt $\hat{x} \in X_{par} \Leftrightarrow \exists \hat{\varepsilon} \in \mathbb{R}^Q : \hat{x}$ ist optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})\ \forall k = 1, \dots Q$.

Beweis:
„$\Rightarrow$“: $\hat{x} \in X_{par}$.
Setze $\hat{\varepsilon}_j := f_j(\hat{x})\ \forall j = 1, \dots Q$.
Annahme: $\hat{x}$ ist nicht optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})\ \forall k = 1, \dots Q$. Dann existiert ein $\bar{x} \in X$:

$$\begin{aligned} &f_k(\bar{x}) < f_k(\hat{x}), \\ &f_j(\bar{x}) \leq \hat{\varepsilon} = f_j(\hat{x}) \quad \forall j \neq k. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\hat{x} \notin X_{par}$. Widerspruch! Daher ist $\hat{x}$ optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})\ \forall k = 1, \dots Q$.
„$\Leftarrow$“: $\exists \hat{\varepsilon}_j : \hat{x}$ optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})\ \forall k = 1, \dots Q$.
Annahme: $\hat{x} \notin X_{par}$. Dann existiert ein $\bar{x} \in X, k \in \{1, \dots Q\} : f_j(\bar{x}) \leq f_j(\hat{x}) (\leq \hat{\varepsilon}_j), f_k(\bar{x}) < f_k(\hat{x})$. $\bar{x}$ ist zulässig für $P_k(\hat{\varepsilon})$ wegen der ersten Ungleichung, aber $\bar{x}$ ist besser (wegen der 2. Ungleichung). Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ und somit folgt $\hat{x} \in X_{par}$.

□

Notationen.

$$\begin{aligned} E_k &:= \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}^Q \mid \{x \in X \mid f_j(x) \leq \varepsilon_j \quad \forall j \neq k\} \neq \emptyset \right\}, \\ X_k(\varepsilon) &:= \{x \in X \mid x \text{ ist optimale Lösung für } P_k(\varepsilon)\} \\ \forall \varepsilon \in E &:= \bigcap_{k=1}^{Q} E_k \text{ gilt} \\ \bigcap_{k=1}^{Q} x_k(\varepsilon) &\subseteq X_{par} \subseteq \bigcup_{\varepsilon \in E} \bigcap_{k=1}^{Q} x_k(\varepsilon). \end{aligned}$$

Dies folgt, da x optimal für alle $P_k(\varepsilon)$ ist und wegen Satz 3.5.3.
Um zu prüfen ob eine Lösung pareto-optimal ist, kann man kontrollieren ob sie in $\bigcap_{k=1}^{Q} x_k(\varepsilon)$ enthalten ist bzw. wenn man wissen will ob eine Lösung nicht pareto-optimal ist, so überprüft man ob diese in $\bigcup_{\varepsilon \in E} \bigcap_{k=1}^{Q} x_k(\varepsilon)$ enthalten ist.

Satz 3.5.4. Chankong und Haimes, 1983:

1.) Ist $\hat{x}$ optimal für das skalarisierte Problem

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x) \text{ mit } \lambda \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ,$$

dann existiert ein $\hat{\varepsilon} : \hat{x}$ ist optimal für $P_k(\varepsilon)\ \forall k = 1, \dots Q$.

2.) Wenn X konvex ist und $f_i : X \to \mathbb{R}$ auch konvex ist für alle i, dann gilt, dass aus der Optimalität von $\hat{x}$ für $P_k(\hat{\varepsilon})\ \forall k = 1, \dots Q$ folgt, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^Q \setminus \{0\}$ existiert, für das x optimal für $\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x)$ ist.

Daraus folgt, dass wenn wir es für alle λ lösen, es äquivalent dazu ist $P_k(\varepsilon)$ für alle ε zu lösen und man kann jeweils das wählen, was leichter ist.

Beweis:
1.) $\hat{x}$ ist optimal für das skalarisierte Problem $\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i f_i(x)$ mit $\lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ$. Setze $\hat{\varepsilon} := f(\hat{x})$. Es gilt für alle $x \in X$

$$\sum_{i=1}^{Q}\lambda_i(f_i(x) - f_i(\hat{x})) \geq 0.$$

Annahme: $\hat{x}$ ist nicht optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})$.
Dann existiert $\bar{x} \in X : f_j(\bar{x}) \leq \hat{\varepsilon}_j = f_j(\hat{x})\ \forall j \neq k$ und $f_k(\bar{x}) < f_j(\hat{x})$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} f_j(\bar{x}) - f_j(\hat{x}) &\leq 0 \quad \forall j \neq k \\ f_k(\bar{x}) - f_k(\hat{x}) &< 0 \\ \Rightarrow \sum_{j\neq k}\lambda_j(f_j(\bar{x}) - f_j(\hat{x})) + \lambda_k(f_k(\bar{x}) - f_k(\hat{x})) &< 0, \end{aligned}$$

was einen Widerspruch ergibt. Daher ist $\hat{x}$ optimal für $P_k(\hat{\varepsilon})$.
2.) HÜ

□

Bemerkung. Für weitere Informationen siehe [5].

3.5.2 Methode von Benson

Idee: Sei $Q = 2$. Falls $x_0 \in X$ (z.B. zufällig gewählt), dann berechne eine Lösung, die x_0 dominiert als Lösung des folgenden Problems

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(x_0): \quad & \max \sum_{i=1}^{Q}\varepsilon_i \\ \text{s.t. } & f_i(x_0) - \varepsilon_i - f_i(x) = 0 \\ & \varepsilon \geq 0 \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Dies ist das Benson-Problem. Die Restriktionen sind äquivalent zu $f_i(x_0) - f_i(x) = \varepsilon_i \geq 0$. Wir wollen das Maß der Verbesserung maximieren.

Satz 3.5.5. $x_0 \in X_{par} \Leftrightarrow$ der optimale Wert von $P_\varepsilon(x_0)$ ist 0 (kann nichts verbessern).

Beweis: HÜ

Satz 3.5.6. Angenommen $P_\varepsilon(x_0)$ ist beschränkt und besitzt eine optimale Lösung (x^*, ε^*), dann gilt $x^* \in X_{par}$.

Beweis: Annahme: $x^* \notin X_{par} \;\; \Rightarrow \exists \hat{x} \in X : f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*), f_q(\hat{x}) < f_q(x^*)$ für ein $q \in \{1, \dots Q\}$. Weil $f_i(x_0) - f_i(x^*) = \varepsilon^* \geq 0$ ist (da (x^*, ε^*) zulässig ist für $P_\varepsilon(x_0)$), folgt, auch, dass $\hat{\varepsilon}_i = f_i(x_0) - f_i(\hat{x}) \geq 0$ gilt und dass $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ zulässig für $P_\varepsilon(x_0)$ ist.
Es gilt

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_i &= f_i(x_0) - f_i(\hat{x}) \\ &= \underbrace{f_i(x_0) - f_i(x^*)}_{\varepsilon_i^*} + \underbrace{f_i(x^*) - f_i(\hat{x})}_{\geq 0, > 0 \text{ für } i=q}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Zielfunktionswert von Benson für $(\hat{x}, \hat{\varepsilon})$ größer ist als für (x^*, ε^*) und dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von (x^*, ε^*).

□

Satz 3.5.7. Sei X konvex und $f_i : X \to \mathbb{R}$ konvex für alle $i = 1, \dots Q$. Falls $P_\varepsilon(x_0)$ keinen endlichen optimalen Wert besitzt (unbeschränkt), dann gilt $Y_{p-par} = \emptyset$.

Beweis: $P_\varepsilon(x_0)$ ist unbeschränkt

$$\Rightarrow \forall \bar{M} \geq 0 \quad \exists \bar{x} \in X : \varepsilon_i = f_i(x_0) - f_i(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall i$$

und

$$\sum_{i=1}^{Q} \varepsilon_i > \bar{M}. \tag{3.10}$$

Annahme: $\exists x^* \in X_{p-par} \overset{3.3.3}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ : x^*$ ist optimal für $\min_{x \in X} \sum_{i=1}^Q \lambda_i f_i(x)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i (f_i(x) - f_i(x^*)) \geq 0 \quad \forall x \in X \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i (f_i(x_0) - f_i(x^*)) \geq 0.\end{aligned}$$

Setze $\lambda_m = \min_{1 \leq i \leq Q} \lambda_i > 0$ und für ein beliebiges $m > 0$ setze $\bar{M} := \frac{M}{\lambda_m}$.
Aus 3.10 finden wir auch für $\bar{M}$ ein $\bar{x} \in X$ mit $f_j(x_0) - f_j(\bar{x}) \geq 0$. Es ist

$$\begin{aligned}\lambda_m \sum_{i=1}^{Q} (f_i(x_0) - f_i(\bar{x})) &> \lambda_m \cdot \bar{M} = M \\ \Rightarrow M &< \sum_{i=1}^{Q} \lambda_m (f_i(x_0) - f_i(\bar{x})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i (f_i(x_0) - f_i(\bar{x})) \quad \forall M \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

Letzteres gilt auch für $M := \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i(f_i(x_0) - f_i(x^*)) \geq 0$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i(f_i(x_0) - f_i(x^*)) < \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i(f_i(x_0) - f_i(\bar{x}))$$
$$\sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(x^*) > \sum_{i=1}^{Q} \lambda_i f_i(\bar{x})$$

und dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von x^*. Somit gilt $\nexists x^* \in X_{p-par} \Rightarrow X_{p-par} = \emptyset$.

□

Korollar 3.5.8. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f_i : X \to \mathbb{R}$ konvex für alle i und sei $f(X) = Y$ $\mathbb{R}_+^Q$-abgeschlossen, dann gilt, dass aus $P_\varepsilon(x_0)$ unbeschränkt folgt, dass $X_{par} = \emptyset$.

Beweis: Aus Satz 3.4.8 folgt

$$S(Y) \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(S(Y)) = cl(Y_{p-eff})$$

und aus Satz 3.5.7 folgt, dass

$$X_{p-par} = \emptyset \Rightarrow Y_{p-eff} = f(X_{p-par}) = \emptyset$$

und somit

$$Y_{eff} \subseteq \emptyset \Rightarrow Y_{eff} = \emptyset = f(X_{par}) \Rightarrow X_{par} = \emptyset.$$

□

Beispiel. Wiecek, 1995

$$\begin{aligned} (X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, <&), \\ Q &= 2, \\ X &= [-100, \infty) \\ f_1 : x &\mapsto x^2 - 4 \\ f_2 : x &\mapsto (x-1)^4 \end{aligned}$$

Benson-Problem:

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(x_0) \quad & \max \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \text{s.t. } & x_0 \geq -100 \\ & \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0 \\ & x_0^2 - 4 - x^2 + 4 - \varepsilon_1 = 0 \\ & (x_0 - 1)^4 - (x-1)^4 - \varepsilon_2 = 0 \end{aligned}$$

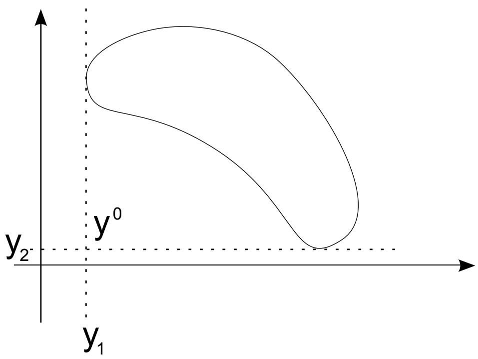
1.) $x_0 = 0$ (zulässig)

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(0) \quad & \max \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \text{s.t. } & 0 \geq -100 \\ & \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0 \\ & -x^2 - \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow -x^2 = \varepsilon_1 > 0 \Rightarrow x = 0, \varepsilon_1 = 0 \\ & 1 - (x-1)^4 - \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow 1 - 1 - \varepsilon_2 = 0 \end{aligned}$$

Das heißt, dass die einzige Lösung $(0,(0,0))$ ist und $\Rightarrow x = 0 \in X_{par}$ (Satz 3.5.5).
2.)$x_0 = 2$: Man kann berechnen (Matlab), dass $x_0 = 2$ von $x = 0.410$ dominiert wird, womit folgt, dass $x = 0.410 \in X_{par}$ (Satz 3.5.6).

3.5.3 Methode des Compromise Programming (CP)

Definition 3.5.9. Sei $(X, f, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^Q, <)$ ein Pareto-Optimierungs-Problem und sei $X_{par} \neq \emptyset$ $(Y_{eff} \neq \emptyset)$. Ein Punkt $y^0 \in \mathbb{R}^Q$ mit $y_i = \inf_{x \in X} f_i(x)$ $\forall i = 1 \dots Q$ heißt idealer Punkt.



Bemerkung. Ein idealer Punkt ist nicht unbedingt zulässig.

Idee: Man versucht dem Punkt y^0 so nahe wie möglich zu kommen, das heißt wir suchen

$$(CPP) \quad \min_{x \in X} d(f(x), y^0),$$

wobei d eine Metrik in $\mathbb{R}^Q$ ist.

Bemerkung. Wir betrachten nur Metriken, die von Normen in $\mathbb{R}^Q$ abgeleitet werden, das heißt $d(a,b) = \|a - b\|$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^Q$ und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^Q \to \mathbb{R}^Q$ ist eine Norm.

Definition 3.5.10. Für alle $c \in \mathbb{R}_+$ heißt $Y_c = \left\{ y \in Y \mid d(y, y^0) \leq c \right\}$ die Niveaumenge um y^0 mit Parameter c.

Definition 3.5.11. Eine Norm $\iota : \mathbb{R}^Q \to \mathbb{R}^+$ heißt monoton, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\mid a_i \mid \leq \mid b_i \mid$ $(\mid a_i \mid < \mid b_i \mid)$ die Ungleichung $\|a\| \leq \|b\|$ $(\|a\| < \|b\|)$ gilt.
Eine Norm $\iota : \mathbb{R}^P \to \mathbb{R}^+$ heißt streng monoton, falls für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\mid a_i \mid \leq \mid b_i \mid$ und $a \neq b$ die Ungleichung $\|a\| < \|b\|$ impliziert wird.

Beispiel. $L_p(a) := (\sum_{i=1}^Q a_i^p)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \in \mathbb{R}$
L_p ist streng monoton für alle p. Überprüfung HÜ.
$L_\infty(a) := \max_{1\leq i\leq Q} \mid a_i \mid$ ist monoton, aber nicht streng monoton. Überprüfung HÜ.

Satz 3.5.12. Es gelten folgende 2 Punkte:

1.) Sei $\|\cdot\|$ eine monotone Norm in $\mathbb{R}^Q$ und $\hat{x}$ eine optimale Lösung von CP ($\min_{x\in X} \|f(x) - y^0\|$). Dann gilt $\hat{x} \in X_{w-par}$. Falls $\hat{x}$ eindeutig optimal, dann gilt $\hat{x} \in X_{par}$.

2.) Falls $\|\cdot\|$ streng monoton ist, dann gilt: $\hat{x}$ ist optimal für $CP \Rightarrow \hat{x} \in X_{par}$.

Beweis:
1.) Sei $\hat{x}$ optimal für CP und $\hat{x}$ nicht aus X_{w-par}
$\Rightarrow \exists x \in X : f_i(x) < f_i(\hat{x})\ \forall i = 1, \dots Q$ da monoton
$\Rightarrow \|f(\hat{x}) - y^0\| > \|f(x) - y^0\|$.
Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$!
Sei $\hat{x}$ eindeutig optimal und $\hat{x}$ nicht aus X_{par}
$\Rightarrow \exists x \in X : f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$ und $f_q(x) < f_q(\hat{x}), q \in \{1, \dots Q\}$
$\Rightarrow \|f(\hat{x}) - y^0\| \geq \|f(x) - y^0\|$
$\Rightarrow x$ optimal für CP.
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Eindeutigkeit von $\hat{x}$
2.) Annahme: $\hat{x} \notin X_{par} \Rightarrow \exists x \in X : f_i(x) \leq f_i(\hat{x})$ und $f_q(x) < f_q(\hat{x}), q \in \{1, \dots Q\}$
$\Rightarrow \|f(\hat{x}) - y^0\| > \|f(x) - y^0\|$
$\Rightarrow$ Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$.

□

Notationen. $a \odot b = (a_1 \cdot b_1, \dots, a_Q \cdot b_Q)$

Wir betrachten das gewichtete CP-Problem für $W \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ (w_i > 0\ \forall i)$ mit $\sum_{i=1}^Q w_i = 1$ und ein $1 \leq p \in \mathbb{R}$ (bzw. $p = \infty$):

$$CP_p^w \quad \min_{x\in X} \left(\sum_{i=1}^Q (w_i(f_i(x) - y_i^0))^p \right)^{\frac{1}{p}} = \min_{x\in X} L_p(w \odot (f(x) - y^0))$$
$$CP_\infty^w \quad \min_{x\in X} \max_{1\leq i\leq Q} (w_i(f_i(x) - y_i^0)) = \min_{x\in X} L_\infty(w \odot (f(x) - y^0))$$

Bemerkung. Für $p = 1$ ist $C_{p=1}^w$ das skalarisierte Problem.

Satz 3.5.13. Sei $\hat{x}$ für $p < \infty$ eine optimale Lösung von CP_p^w. Wenn die Bedingung, dass $\hat{x}$ eine eindeutig optimale Lösung für CP_p^w ist, erfüllt ist, dann gilt $\hat{x} \in X_{par}$.

Beweis: Annahme: $\hat{x} \notin X_{par} \Rightarrow \exists x \in X : f_i(x) \leq f_i(\hat{x})\ \forall i \neq q, f_q(x) < f_q(\hat{x})$. Daraus folgt

$$((f_i(x) - y_i^0)w_i)^p \leq ((f_i(\hat{x}) - y_i^0)w_i)^p \quad \forall i,\ (\text{für } i = q : „<“)$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^Q ((f_i(x) - y_i^0)w_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{i=1}^Q ((f_i(\hat{x}) - y_i^0)w_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Optimalität von $\hat{x}$ für CP_p^w.

□

Bemerkung. Wir brauchen die Eindeutigkeit nur für den Fall, dass man $w_i \geq 0$ für CP_p^w zulässt. Für $w_i > 0$ kann die Eindeutigkeit auch weggelassen werden

Satz 3.5.14. Sei $w_i > 0\ \forall i = 1, \dots Q, p = \infty$, dann gilt:

1.) Ist $\hat{x}$ optimal für $CP_\infty^w \Rightarrow \hat{x} \in X_{w-par}$.

2.) Falls $X_{par} \neq \emptyset$ und CP_∞^w eine optimale Lösung besitzt, dann existiert $\hat{x}$ für CP_∞^w mit $\hat{x} \in X_{par}$. Falls mehrere optimale Lösungen existieren, dann gibt es darunter mindestens eine pareto-optimale Lösung.

3.) Falls $X_{par} \neq \emptyset$ und CP_∞^w eine eindeutig optimale Lösung $\hat{x}$ besitzt, dann gilt $\hat{x} \in X_{par}$.

Beweis:
1.) Ist analog zu den vorherigen Beweisen sehr einfach.
2.) Sei $\hat{x}$ eine optimale Lösung von CP_∞^w. Es gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}
f_i(\hat{x}) - y_i^0 &\geq f_i(\hat{x}) - f_i(x) \quad (\text{da } f_i(x) - y_i^0 \geq 0)\\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{Q} f_i(\hat{x}) - y_i^0 &\geq \sum_{i=1}^{Q} f_i(\hat{x}) - f_i(x) \quad \forall x \in X\\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{Q} f_i(\hat{x}) - y_i^0 &\geq \sum_{i=1}^{Q} \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Benson-Problem $P_\varepsilon(\hat{x})$ ist beschränkt.
$\Rightarrow \exists$ optimale Lösung $\bar{x}$ für $P_\varepsilon(\hat{x})$.
$\Rightarrow \bar{x} \in X_{par}$ nach Satz 3.5.6.
Es gilt

$$\begin{aligned}
f_i(\bar{x}) &\leq f_i(\hat{x}) \quad \forall i\\
\Rightarrow w_i(f_i(\bar{x}) - y_i^0) &\leq w_i(f_i(\hat{x}) - y_i^0) \quad \forall i\\
\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq Q} w_i(f_i(\bar{x}) - y_i^0) &\leq \max_{1 \leq i \leq Q} w_i(f_i(\hat{x}) - y_i^0) \quad \forall i.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ ist optimal für CP_∞^w mit $\bar{x} \in X_{par}$.
3.) Folgt aus 2.).

□

Satz 3.5.15. Chao, Aktins, 1983: Ein zulässiges $x \in X$ ist schwach pareto-optimal $\Leftrightarrow \exists w \in (\mathbb{R}_+^Q)^\circ$, sodass $\hat{x}$ optimal für CP_∞^w ist.

Beweis:
„$\Leftarrow$“: Satz 3.5.14 1.)
„$\Rightarrow$“: Sei $\hat{x} \in X_{w-par}$. Wir definieren passende w_i, sodass $\hat{x}$ optimal für

$$CP_\infty^w : \quad w_i := \frac{1}{f_i(\hat{x}) - y_i^{00}} > 0,$$

wobei $y_i^{00} := y_i^0 - \varepsilon, \varepsilon > 0$ beliebig (y^{00} ... utopischer Punkt, wird von Zielfunktion nie erreicht).
Annahme: $\hat{x}$ ist nicht optimal für CP_∞^w mit y^{00}, also für $\min_{x\in X}\max_{1\le i\le Q} w_i(f_i(x) - y_i^{00})$
$\Rightarrow \exists x$ zulässig, sodass

$$\begin{aligned}
\max_{1\le i\le Q} w_i(f_i(x) - y_i^{00}) &< \max_{1\le i\le Q} w_i(f_i(\hat{x}) - y_i^{00}) \\
&= \max_{1\le i\le Q} \frac{w_i(f_i(\hat{x}) - y_i^{00})}{w_i(f_i(\hat{x}) - y_i^{00})} \\
&= 1 \\
\Rightarrow w_i(f_i(x) - y_i^{00}) &< 1 \\
\Rightarrow f_i(x) - y_i^{00} &< \frac{1}{w_i} = f_i(\hat{x}) - y_i^{00} \\
\Rightarrow f_i(x) &< f_i(\hat{x}).
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\hat{x} \in X_{w-par} \Rightarrow \hat{x}$ ist optimal.

□

Bemerkung.

- Mit Satz 3.5.15 haben wir eine komplette Charakterisierung von
$$X_{w-par} = \bigcup_{w\in(\mathbb{R}_+^Q)^\circ} \{x \in X \mid x \text{ optimal für } CP_\infty^w\}.$$
Eine Charakterisierung für X_{par} ist nicht bekannt.
- Die Sätze 3.5.12-3.5.14 gelten auch, falls die vorkommenden CP-Probleme mit y^{00} statt y^0 definiert werden.
- Wenn in Satz 3.5.15 der utopische Punkte y^{00} durch y^0 ersetzt wird , so gilt die Aussage nicht mehr. Es gilt nicht ein mal
$$Y_{p-eff} \subset \bigcup_{w\in(\mathbb{R}_+^Q)^\circ)} \{x \in X \mid x \text{ optimal für } CP_\infty^w\}.$$

Hauptergebnis des Abschnitts
(Analog zum Satz von Hartley für die Skalarisierungsmethode)
$Y \neq \emptyset, Y$ $\mathbb{R}_+^Q$-konvex, Y $\mathbb{R}_+^Q$-abgeschlossen
$\Rightarrow S(Y) \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(S(Y))$.
Sei

$$\begin{aligned}
W_0 &:= \left\{ w \in \mathbb{R}^Q \mid w_i > 0, \sum_{i=1}^Q w_i = 1 \right\} \\
W &:= \left\{ w \in \mathbb{R}^Q \mid w_i \ge 0, \sum_{i=1}^Q w_i = 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Für alle $w \in W, \forall y \in Y$ betrachte $w \odot y$. Für alle $w \in W, \forall p \in [1, \infty)$ sei

$$\begin{aligned}
A(w, p, Y) &= \left\{ \hat{y} \in Y \mid L_p(w \odot (\hat{y} - y^{00})) = \min_{y\in Y} L_p(w \odot (y - y^{00})) \right\}, \\
A(Y) &= \bigcup_{w\in W_0} \bigcup_{1\le p\le\infty} A(w, p, Y).
\end{aligned}$$

Satz 3.5.16. Sawaragi, Nakayama, Tanino, 1985: Sei $Y \neq \emptyset$ $\mathbb{R}^Q_+$-abgeschlossen, dann gilt

$$A(Y) \subseteq Y_{p-eff} \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(A(Y)).$$

Eigenschaften der L_p-Normen: (sind wichtig für den Beweis)

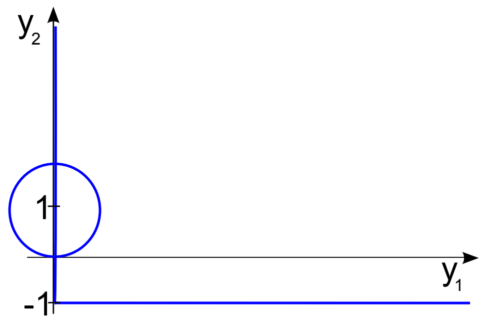
(E1) $L_\infty(y) \leq L_p(y)\ \forall y \in \mathbb{R}^Q$,

(E2) $\lim_{p\to\infty} L_p(y) = l_\infty(y)\ \forall y \in \mathbb{R}^Q$ und

(E3) l_p ist strikt monoton für $p < \infty$, L_∞ ist monoton.

Bemerkung. Satz 3.5.16 gilt für jedes System von Normen $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$, das die Eigenschaften (E1)-(E3) erfüllt.

Beispiel. $Y_{eff} \subseteq cl(A(Y))$ kann echt sein:



$$Y = \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + (y_2-1)^2 \leq 1\right\} \cup \left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 0, y_2 \geq -1\right\}$$

Y ist abgeschlossen und nicht $\mathbb{R}^Q_+$-konvex. Wir sehen $(0,0) \notin Y_{eff}$ und $(0,0) \in cl(A(Y))$. Für alle $y \in Y_{eff}$ mit $y_2 < 1, y_1 > 0$ gibt es $(w_1, w_2) : w_1, w_2 > 0, w_1 + w_2 = 1$ und ein $p \in \mathbb{N}$, sodass (y_1, y_2) optimal sind für

$$\min_{y\in Y} L_p(w \odot (y - y^{00})), \text{wobei}$$
$$y^{00} = (-1,-1) - (\varepsilon, \varepsilon) = -(1+\varepsilon, 1+\varepsilon).$$

1.) $p = 4 \Rightarrow L_4(w \odot (y - y^{00})) := g_{w_1,w_2}(y_1, y_2)$
2.) $H(g_{w_1,w_2})$ Hessematrix positiv definit $\to \frac{\partial g}{\partial w_1} \overset{!}{=} 0$, $\frac{\partial g}{\partial w_2} \overset{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 &= f_1(w_1, w_2) = y_1^* \\ y_2 &= f_2(w_1, w_2) = y_2^* \\ \Rightarrow A(Y) &= Y_{eff} \setminus \{0, -1\} \\ \Rightarrow (0,0) &\in cl(A(Y)) \end{aligned}$$

Beispiel. Pareto-Optimierung mit 2 Zielfunktionen:

$$\begin{aligned}X &= [-100, \infty)\\ f_1(x) &= x^2 - 4\\ f_2(x) &= (x-1)^4.\end{aligned}$$

Wir zeigen $X_{par} = [0, 1]$. Man erhält als Lösung von CP

$$\begin{aligned}w &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\\ p &= 2\end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}y^0 &= (\min_{x \in X} x^2 - 4, \min_{x\in X}(x-1)^4)\\ y^0 &= (-4, 0) \quad \text{idealer Punkt}\\ y^{00} &= (-5, -1) \quad \text{utopischer Punkt (z.B.)}\\ CP_2^w &: \min_{x\in X} \sqrt{(x^2 - 4 + 5)^2 \cdot \frac{1}{4} + ((x-1)^4 + 1)^2 \cdot \frac{1}{4}}\\ &\Leftrightarrow \min_{x\in X}(x^2+1)^2 + ((x-1)^4 + 1)^2 = \min_{x\in X} g(x)\\ g'(x) &= 2(x^2+1) \cdot 2x + 2((x-1)^4+1) \cdot 4(x-1)^3 = 0\\ &\Leftrightarrow x^* = 0.40563 \quad (g'' > 0 \text{ Konvexität})\\ &\Rightarrow x^* \in X_{par} \quad \text{nach Satz 3.5.13.}\end{aligned}$$

Wir wissen $A(Y) \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(A(Y))$ und wir zeigen noch $A(Y) = f([0,1])(= cl(A(Y)))$. Damit folgt dann insgesamt, dass

$$\begin{aligned}Y_{eff} &= f([0,1])\\ X_{par} &= [0,1].\end{aligned}$$

$A(Y) = f([0,1])$: Es ist

$$\begin{aligned}CP_p^w &: \min_{x\in[-100,\infty)} (w_1^p(x^2+1)^p + w_2^p((x-1)^4+1)^p)^{\frac{1}{p}}\\ &\Leftrightarrow \min_{x\in[-100,\infty)} w_1^p(x^2+1)^p + w_2^p((x-1)^4+1)^p = \min g(x, w_1, w_2, p)\\ g'_{w_1,w_2,p}(x) &= w_1^p \cdot p(x^2+1)^{p-1} \cdot 2x + w_2^p p((x-1)^4+1)^{p-1} 4(x-1)^3\\ g''_{w_1,w_2,p}(x) &= \ldots \geq 0.\end{aligned}$$

$\Rightarrow g$ ist konvex für alle $w_1 > 0, w_2 > 0, p \geq 1$. Wir setzen $g' = 0$ und erhalten somit

$$\begin{aligned}-\frac{w_1^p}{w_2^p} &= \frac{2(x-1)^3((x-1)^4+1)^{p-1}}{x(x^2+1)^{p-1}} =: h(x)\\ \operatorname{sgn}(h(x)) &= \operatorname{sgn}\frac{(x-1)^3}{x} = -1\\ &\Rightarrow x \in [0,1]\\ &\Rightarrow A(Y) \subseteq f([0,1]).\end{aligned}$$

3.6 Multikriterielle lineare Optimierung

Gegeben:

$$\begin{aligned} &X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}, \\ &A \in \mathbb{R}^{m\times n}, Rg(A) = m, n \geq m, \\ &b \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Zielfunktionen: $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto (c^{(i)})^T x$
$(X, C, \mathbb{R}^Q) \mid id \mid (\mathbb{R}^d, \leq)$ Pareto-Optimierung
$C \in \mathbb{R}^{Q\times n}, Y = f(X) = \{Cx \mid x \in X\}$, Y abgeschlossen und konvex,

$$C = \begin{pmatrix} (c^{(1)})^T \\ (c^{(2)})^T \\ . \\ (c^{(Q)})^T \end{pmatrix}$$

Alternative Schreibweise:

$$\begin{aligned} MCLP \quad & \min Cx \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Folgerung: Aus dem Existenzsatz über MCOPs folgt:
Falls $Y \neq \emptyset$ und $\exists x \in \mathbb{R}^Q : Cx = Y \subset y + \mathbb{R}^Q_+$, dann gilt $Y_{eff} \neq \emptyset$.
Begründung: Aus obigem folgt, dass Y nach unten beschränkt ist. Sei

$$Y^0 = \left\{y \in Y \mid y \leq y^0\right\} \quad \forall y^0 \in Y.$$

Existenzsatz: $\exists y^0, Y^0$ kompakt $\Rightarrow Y_{eff} \neq \emptyset$.
Da

$$Y^0 = Y \cap (y^0 - \mathbb{R}^Q_+)$$

und Y und $y^0 - \mathbb{R}^Q_+$ abgeschlossen sind, folgt, dass Y^0 abgeschlossen ist. Des weiteren gilt $Y^0 \subset Y$ ist nach unten beschränkt und $Y^0 \subseteq (y^0 - \mathbb{R}^Q_+)$ ist nach oben beschränkt, also ist Y^0 beschränkt. Insgesamt folgt damit, dass Y^0 kompakt ist und daraus, dass $Y_{eff} \neq \emptyset$.

Anwendung vom Satz von Hartley:
$S(Y) = Y_{p-eff} \subseteq Y_{eff} \subseteq cl(S(Y))$
Wir zeigen noch $S(Y) = Y_{eff}$ gilt für $MCLP$.

Lemma 3.6.1. Für $x_0 \in X$ gilt $x_0 \in X_{par} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max e^T y \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & Cx + Iy = Cx_0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

mit $e = (1, \ldots 1)(Q$ mal) und $I \in \mathbb{R}^{Q\times Q}$ die Einheitsmatrix eine optimale Lösung $(\hat{x}, \hat{y})$ mit $\hat{y} = (0, \ldots 0)$ besitzt.

Bemerkung. Dies ist eine Umformung von Benson. Die erste Restriktion entspricht der Zulässigkeit und die zweite entspricht $f_i(x) - f_i(x_0) + \varepsilon_0 = 0(\varepsilon_i = y_i)$.

Lemma 3.6.2. Für $x_0 \in X$ gilt $x_0 \in X_{par} \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (D) \quad & \min u^T b + w^T C x_0 \\ \text{s.t. } & u^T A + w^T C \geq 0 \\ & w \geq e \end{aligned}$$

eine optimale Lösung $(\hat{u}, \hat{w})$ mit $\hat{u}^T b + \hat{w}^T C x_0 = 0$ besitzt.

Beweis: Folgt direkt aus dem starken Dualitätssatz der linearen Optimierung.

□

Satz 3.6.3. Isermann, 1947: Es gilt

$$\begin{aligned} Y_{p-eff} = S(Y) = Y_{eff}, \text{ das heißt} \\ x_0 \in X_{par} \Leftrightarrow \exists \lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ : \lambda^T C x_0 \leq \lambda^T C x \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

gilt.

Beweis: $S(Y) \subseteq Y_{eff}$ gilt für $MCLP$ (Hartley). Wir zeigen $Y_{eff} \subseteq S(Y)$.
Sei $x_0 \in X_{par}$ $(y = Cx_0 \in Y_{eff})$. Aus Lemma 3.6.2 folgt, dass eine optimale Lösung $(\hat{u}, \hat{w})$ für (D) existiert

$$\begin{aligned} \hat{u}^T b + \hat{w}^T C x_0 = 0 \\ \Rightarrow \hat{u}^T b = -\hat{w}^T C x_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\Rightarrow \hat{u}$ ist optimal für

$$(P2) \quad \min \left\{ u^T b \mid u^T A \geq -\hat{w}^T C \right\}.$$

Begründung: Es ist zulässig, da $(\hat{u}, \hat{w})$ zulässig für (D) ist
$(\Rightarrow \hat{u}^T A + \hat{w}^T C \geq 0)$. Es ist noch die Optimalität zu zeigen.
Falls ein $\bar{u}$ existiert, sodass

$$\hat{u}^T b > \bar{u}^T b = \bar{u}^T A x \geq \hat{w}^T C x \quad \forall x \in X$$

gilt, dann folgt $\hat{u}^T b > -\hat{w}^T C x_0$ für x_0 und dies ist ein Widerspruch zu 3.11 daher ist $\hat{u}$ optimal.
Sei $(D2)$ das duale Problem zu $(P2)$:

$$(D2): \quad \max \left\{ -\hat{w}^T C x \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}.$$

Aus der schwachen Dualität folgt, dass $u^T b \geq -\hat{w}^t C x$ $\forall u$ zulässig für $(P2)$ ist und für alle x zulässig für $(D2)$ ist.
Zudem gilt 3.11, woraus wegen der starken Dualität folgt, dass x_0 optimal für $(D2)$ ist. $(D2)$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} \sum_{i=1}^{Q} \hat{w}_i (c^{(i)})^T x \\ w_i \geq e_i = 1, \end{aligned}$$

das heißt $x_0 \in Opt(\hat{w}) \subseteq S(Y)$.

□

3.6.1 Parametrische lineare Optimierung

Gegeben:

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{m\times n}, Rg(A) = m,\\ b &\in \mathbb{R}^m,\\ c^{(1)}, c^{(2)} &\in \mathbb{R}^n,\\ c(\lambda) &= \lambda c^{(1)} + (1-\lambda)c^{(2)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} PLP \quad & \min c(\lambda)^T x\\ \text{s.t. } & Ax = b\\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ansatz zur Lösung: modifiziertes Simplexverfahren

- Phase 1: Überprüfung der Zulässigkeit: ob $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Ax = b\right\} = \emptyset$.
- Phase 2: Falls $X \neq \emptyset$, dann löse LP $(\lambda = 1)$ (für jedes $\lambda \in [0,1]$ entsteht ein lineares Programm $\to LP(\lambda)$). Sei $B^0(X^0)$ eine optimale Basis (optimale Basislösung).
- Phase 3: Variiere λ von 1 bis 0, löse die dazugehörigen linearen Programme neu, sobald eine Variation von λ die Optimalität der vorherigen Lösung zerstört.

Es ist

$$\begin{aligned} A &= (\underbrace{B^0}_{\text{Basis}} \mid \underbrace{N^0}_{\text{Nichtbasis}})\\ B^0 x_B^0 + \underbrace{N^0 x_n^0}_{=0} &= b\\ \Rightarrow x_B^0 &= (B^0)^{-1} b. \end{aligned}$$

Seien $\bar{c}(\lambda)$ die reduzierten Kosten, dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{c}(\lambda)^T &= c(\lambda)^T - c_B(\lambda)^T B^{-1} A\\ \Rightarrow \bar{c}(\lambda) &= \lambda \bar{c}^{(1)} + (1-\lambda)\bar{c}^{(2)}. \end{aligned}$$

Das Optimalitätskriterium $\bar{c}_i \geq 0$ gilt genau dann, wenn B eine optimale Basis ist. Zudem ist B^0 optimal für $LP(\lambda) \Leftrightarrow \bar{c}(\lambda) \geq 0$.
Fall 1: $\bar{c}^{(2)} \geq 0$, dann ist $\bar{c}(\lambda) \geq 0 \Rightarrow x^0$ ist optimal für alle $\lambda \in [0,1]$.
Fall 2: $\exists j \in \{1,\dots n\} : \bar{c}_j^{(2)} < 0$. Für alle $j = 1,\dots n$ ist

$$\lambda \bar{c}_j^{(1)} + (1-\lambda)\bar{c}_j^{(2)} = \bar{c}_j(\lambda)$$

und falls $\bar{c}_j^{(2)} < 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \lambda \bar{c}_j^{(1)} + (1-\lambda)\bar{c}_j^{(2)} &= 0, \text{ wenn}\\ \lambda &= \frac{-\bar{c}_j^{(2)}}{\bar{c}_j^{(1)} - \bar{c}_j^{(2)}} =: \alpha_j. \end{aligned}$$

Für alle $\lambda \lesseqgtr \alpha_j$ gilt $c(\lambda) \lesseqgtr 0$.
Setze

$$\lambda^{(1)} := \max \left\{ \alpha_j \mid j \in \{1, \dots n\}, \bar{c}_j^{(2)} < 0 \right\}$$

und suche die optimalen Lösungen für $\lambda < \lambda^{(1)}$. Pivotiere an Zelle (i', j'), wobei

$$j' \in \arg\max \left\{ \alpha_j \mid j \in \{1, \dots n\}, \bar{c}_j^{(2)} < 0 \right\}$$
$$i' \in \arg\min \left\{ \frac{b_i}{a_{ij'}} \mid j' \in \{1, \dots m\}, a_{ij'} > 0 \right\}.$$

Die neue Basis B^1 und die neue Basislösung x^1 ist optimal für $LP(\lambda^{(1)})$ und $\lambda < \lambda^{(1)}$, sodass

$$\bar{c}(\lambda) = \lambda \bar{c}^{(1)} + (1 - \lambda)\bar{c}^{(2)} \geq 0,$$

wobei diese reduzierten Kosten bzgl. B^1 berechnet werden.

Bemerkungen. zu PLP

- PLP ist die Skalarisierung von $MCLP$. $C \in \mathbb{R}^{2 \times n}$,

$$C = \begin{pmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} &\min Cx \\ \text{s.t. } &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

  Mit Isermann gilt $S(Y) = Y_{eff}$. Die Lösungen (0, 1) und (1,0) ($\lambda = 0$, bzw. $\lambda = 1$) müssen nicht pareto-optimal sein, weil $(1, 0), (0, 1) \notin (\mathbb{R}_+^Q)^\circ$. Um pareto-optimale Lösungen zu bekommen, lösen wir folgende 2 linearen Programme

$$\begin{aligned} \lambda = 1: \quad & \min (c^{(1)})^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & (c^{(2)})^T x \geq (c^{(2)})^T x^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda = 2: \quad & \min (c^{(2)})^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & (c^{(1)})^T x \geq (c^{(1)})^T x^{(2)}, \end{aligned}$$

  wobei $x^{(2)}$ eine optimale Lösung von $LP(0)$ und $x^{(1)}$ eine optimale Lösung von $LP(1)$ ist.

- $Y = CX$,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\},$$
$$Y_{eff} = \bigcup_{i=1}^{p} conv(Cx^{(i-1)}, Cx^{(i)})$$

  $Y_{eff} \subseteq Rd(Y), x^{(i)}$ ist die optimale Lösung von $LP(\lambda^{(i)})$ für alle i. p ist die Anzahl der Iterationen. $x^{(i+1)}$ ist auch eine optimale Lösung von $LP(\lambda^{(i+1)})$, da an den Sprungpunkten beide optimal sind.

Satz 3.6.4. Der optimale Zielfunktionswert $f(\lambda)$ von PLP ist stetig, stückweise linear und konkav auf $[0, 1]$ (bei Maximierungsproblemen konvex).

Beweis: Siehe [6].

Korollar 3.6.5. Der Simplexalgorithmus zur Lösung von PLP terminiert nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Die Anzahl der Ecken den Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist endlich. Auf Grund von Satz 3.6.4 kann jede Basislösung für höchstens 2 der Probleme $LP(\lambda^{(i)})$, $0 \leq i \leq p$ als optimale Lösung dienen.

□

Beispiel.

$$\begin{aligned} &\min c(\lambda)x \\ \text{s.t. } &x_2 \leq 3 \\ &3x_1 - x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &c^{(1)} = (3, 1) \\ &c^{(2)} = (-1, -2) \end{aligned}$$

Für $\lambda = 1$ erhält man $\min 3x_1 + x_2$ mit $x \in X$ als Zielfunktion. Es ergibt sich folgendes Tableau:

-1	-2	0	0	0
3	1	0	0	0
0	1	1	0	3
3	-1	0	1	6

Lösung: $x_1 = 0, x_2 = 0$

$$\lambda^{(1)} = \max\left\{\frac{1}{3+1}, \frac{2}{1+2}\right\} = \frac{2}{3}$$
$$j' = 2$$

-1	0	2	0	6
3	0	-1	0	-3
0	1	1	0	3
3	0	1	1	9

$x_1 = 0, x_2 = 3, J = \{1\}, j' = 1$

$$\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 9 \\
0 & 0 & -2 & -1 & -12 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 3 \\
\hline
\end{array}$$

$J = \emptyset, (3,3)$ ist optimal für $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$

3.6.2 Theorie der MCLP

Sei

$$\begin{aligned}
A &\in \mathbb{R}^{m \times n}, Rg(A) = m \leq n, \\
b &\in \mathbb{R}^m, \\
C &\in \mathbb{R}^{Q \times n} \\
X &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\min Cx \\
\text{s.t. } &Ax = b \\
&x \geq 0
\end{aligned}$$

Das skalarisierte Problem mit Gewichtungsvektor $\lambda, \lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ$ ist

$$\begin{aligned}
LP(\lambda) \quad &\min \lambda^T Cx \\
\text{s.t. } &x \in X
\end{aligned}$$

$\bar{C} = C - C_B B^{-1} A$ sind die reduzierte Kosten bzgl. Basis B, R bezeichnet den Nichtbasisteil von $\bar{C}$, $\bar{C}_B$ ist der Basisteil von $\bar{C}$.

Lemma 3.6.6. $x_{par} \neq \emptyset \Leftrightarrow X$ hat einen pareto-optimalen Extrempunkt (Ecke des Polyeders X).

Definition 3.6.7. Eine Basis B ($B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, basisreguläre Teilmatrix von A) heißt effizient, wenn B eine optimale Basis für ein $LP(\lambda)$ mit $\lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ$ ist.

Lemma 3.6.8. Sei B eine effiziente Basis und x_B der dazugehörige Extrempunkt, dann gilt $x_B \in X_{par}$.
Ist $x \in X_{par}$ ein Extrempunkt, dann existiert eine effiziente Basis B, sodass x der dazugehörige Punkt ist ($x_i = 0$ für $i \notin B, x = B^{-1}b$ für den Basisteil).

Definition 3.6.9. Ein Pivot heißt zulässig, wenn die Lösung nach diesem Pivot zulässig ist. Zwei Basen heißen adjazent, wenn $\hat{B}$ von $\bar{B}$ durch einen einzigen Pivotschritt erhalten wird. Sei B eine effiziente Basis, dann heißt x_j effiziente Nichtbasisvariable, wenn ein $\lambda \in (\mathbb{R}^Q_+)^\circ$ existiert, sodass $\lambda^T R \geq 0$ und $\lambda^T r^{(j)} = 0$, wobei $r^{(j)}$ die j-te Spalte von R ist.
Sei B eine effiziente Basis und x_j eine effiziente Nichtbasisvariable bzgl. B. Ein zulässiger Pivotschritt mit x_j als neuer Basisvariable heißt effizienter Pivotschritt bzgl. B und x_j.

Lemma 3.6.10. Sei B eine effiziente Basis und x_j eine effiziente Nichtbasisvariable bzgl. B. Jeder Pivotschritt bzgl. B und x_j führt zu einer neuen effizienten Basis B' (adjazent zu B).

Bemerkung. Das System $\lambda^T R \geq 0, \lambda^T r_j = 0$ ist die allgemeine Form der Gleichungen, die zur Bestimmung der „relevanten “ Werte von λ verwendet werden.
Wenn x_B und $x_{\hat{B}}$ pareto-optimale Lösungen sind, die zu den effizienten Basen B und $\hat{B}$ assoziiert werden, dann sind x_B und $x_{\hat{B}}$ die optimalen Lösungen desselben $LP(\lambda)$ und $conv(x_B, x_{\hat{B}}) \subseteq X_{par}$ (konvexe Kombinationen).

Frage: Wie überprüfen wir, ob x_j bzgl. einer effizienten Basis B eine effiziente Nichtbasisvariable ist?

Satz 3.6.11. Evans, Steuer, 1973: Sei B eine effiziente Basis und x_j eine Nichtbasisvariable. Alle zulässigen Pivots mit x_j als neue Basisvariable sind effizient $\Leftrightarrow$ die linearen Programme

$$\max \left\{ e^T v \mid Ry - r^j \delta + Iv = 0 : y, \delta, v \geq 0 \right\}$$

einen optimalen Wert gleich 0 besitzen.

Bemerkung. Dieses lineare Programm ist entweder unbeschränkt oder es ist beschränkt und hat als optimalen Wert 0. Im unbeschränkten Fall ist x_j keine effiziente Nichtbasisvariable.

Satz 3.6.12. Steuer, 1985: Alle effizienten Basen sind zusammenhängend, das heißt man kann von jeder effizienten Basis zu jeder anderen effizienten Basis durch eine Reihe von zulässigen Pivots kommen.

3.6.3 Ein multikriterieller Simplex-Algorithmus

Für ein MCLP gibt es 3 Fälle

1.) MCLP unzulässig, d.h. $X = \emptyset$,

2.) $X_{par} = \emptyset$ und $X = \emptyset$ und

3.) $X_{par} \neq \emptyset$.

Phase 1: Bestimme einen 1. Extrempunkt (zulässige Basis) oder terminiere mit $X = \emptyset$. Die Zielfunktion ist irrelevant. (Dies entspricht der Phase 1 des herkömmlichen Simplex-Algorithmus.)
Phase 2: Bestimme einen pareto-optimalen Extrempunkt (effiziente Basis) oder terminiere mit $X_{par} = \emptyset$.
Phase 3: Pivotiere entlang der effizienten Basen um die pareto-optimalen Extrempunkte bzw. Extremstrahlen zu bestimmen.

ad *Phase 2:*

- Wenn $X \neq \emptyset$ nach Phase 1, dann $\exists x^0 \in X \rightarrow$. Überprüfe ob $x^0 \in X_{par}$.
- Wenn es unbeschränkt ist: $X_{p-par} = \emptyset$,
  $X_{par} = X_{p-par} = \emptyset$.

- Falls (P) beschränkt ist und (x^*, y^*) die optimale Lösung von (P) ist, dann ist $X^* \in X_{par}$, aber x^* muss kein Extrempunkt sein.
  In Lemma 3.6.2 wurde gezeigt, dass die optimale Lösung (u^*, w^*) des Problems (D) die Gleichung

  $$u^{*T} b + w^{*T} x^0 = 0$$

  erfüllt. Daraus folgt, dass u^* eine optimale Lösung von $(P2)$ ist.
  Das duale Problem $(D2)$ von $(P2)$ ist äquivalent zu

  $$\min \left\{ w^{*T} Cx \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}.$$

  Aus Satz 3.6.4 wissen wir, dass $(D2)$ eine optimale Lösung besitzt, die pareto-optimal ist und ein Extrempunkt für MCLP ist.

Literaturverzeichnis

[1] Michal Tzur: *A Simple Forward Algorithm to Solve General Dynamic Lot Sizing Models with n Periods in 0(n* log *n) or 0(n) Time*

[2] Donald Lee Iglehart: *Optimality of (s, S)-policies in the infinite horizon dynamic inventory model*, Management Science, 259-267

[3] Donald Lee Iglehart: *Dynamic programming and stationarity analysis of investory problems*, Standfort University Press

[4] Margesarian: *Nonlinear programming*, NY 1969

[5] V. Chankong, Y.Y. Haimes: *Multiobjective decision making Theory and Methodology*, Elsenier, Science Publishing Co., New York, 1983

[6] Dantzig und Thapa: *Linear Programming: Theory and Extensions*, Band 2, Springer, NY, 2003