Mathematische Optimierung SS 2013

6. Übungsblatt

32. (Satz von Carathéodory). Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie:

$$x \in \operatorname{conv}(S) \Longrightarrow \quad \exists x_1, \ldots, x_{n+1} \in S \text{ sodaß } x \in \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_{n+1}).$$

Dieser Satz besagt also, daß sich jeder Punkt der konvexen Hülle einer Menge S durch eine Konvexkombination von höchstens $n+1$ Punkten aus S darstellen läßt.

Gegeben seien die Eckpunkte x_i eines Vierecks im $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{x}_1 = (0,0), \mathrm{x}_2 = (4,1), \mathrm{x}_3 = (2,6), \mathrm{x}_4 = (0,3)$. Stellen Sie den Schwerpunkt $s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$ als Konvexkombination von höchstens 3 Eckpunkten dar.

33. Beweisen Sie den folgenden Alternativsatz von Gordan (1873):

Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix mit $A \neq 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Das System $Ax = 0$, $x \geq 0$ besitzt eine nicht-triviale Lösung $x \neq 0$.

(b) Das System $A^t y > 0$ besitzt keine Lösung.

34. Beweisen Sie den folgenden Alternativsatz von Stiemke (1915):

Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix mit $A \neq 0$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) Das System $Ax = 0$, $x > 0$ hat keine Lösung.

(b) Das System $A^t y \geq 0$, $A^t y \neq 0$ hat eine Lösung.

35. Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lllll} \min & 5x_1 & + & 5x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & 2x_1 & & x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, & x2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Erfüllt die optimale Lösung $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 4/3)$ des obigen Problems und die dazugehörige Optimallösung des dualen Problems die strikte Komplementarität-Bedingung? Bestimmen Sie alle Paare von optimal primalen und optimal dualen Lösungen, die die strikte Komplementarität-Bedingung erfüllen.

36. **Sensitivitätsanalyse.**

(a) Betrachten sie eine Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Wie ändert sich x, wenn die rechte Seite des linearen Programms sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?

(b) Gegeben sei eine nichtentartete Basislösung x des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ ist, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Wenn $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0 \,\}$ zulässig.

(c) Gegeben sei eine optimale Basislösung x^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$, die zur Basis B gehört. Zeigen Sie: Wenn die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm optimal.

(d) Zeigen Sie: Wenn x^* eine nichtentartete optimale Basislösung mit Optimalwert z^* des linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \,\}$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programms $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} \pi_i t_i$$

mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

37. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & + & c_3x_3 & + & c_4x_4 & & \\
\text{unter} & 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\
 & 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Bestimmen Sie die Basislösung zu den Spalten 1 und 2, und zeigen Sie, daß diese Basislösung zulässig ist. Wie groß kann c_3, c_4 maximal gewählt werden, damit diese Basislösung optimal ist. Stellen Sie das dazugehörige Tableau auf, und bestimmen sie die zugehörige Duallösung.