Mathematische Optimierung SS 2013

2. Übungsblatt

11. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in K$ heißt *Extremapunkt* von K, wenn es unmöglich ist x als Konvexkombination zweier verschiedener Punkte aus K darzustellen, d.h. $x = \alpha z + (1-\alpha)y$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und $z, y \in K$, impliziert $x = y = z$. Die *konvexe Hülle* $\mathrm{conv}(M)$ einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathrm{conv}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i \,|\, d \in \mathbb{N}\,,\ \mathrm{x_i} \in \mathrm{M},\ \lambda_\mathrm{i} \geq 0,\ \text{für } \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{d},\ \text{und } \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \lambda_\mathrm{i} = 1 \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie das jede Ecke eines Polyeders $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{Ax} \leq \mathrm{b}\}$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, ein Extremalpunkt von P ist.

   (b) Folgern Sie mit Hilfe des folgenden Satzes von Minkowksi, dass jedes Polytop als konvexe Hülle seiner Ecken dargestellt werden kann.

   Satz von Minkowski: Eine kompakte, konvexe Menge K in $\mathbb{R}^n$ ist gleich der konvexen Hülle ihrer Extremalpunkte.

12. Seien P und P' die Polyeder der zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblem in kanonischer Form bzw. in Normalform. Zeigen Sie, dass jeder Seite S von P eine Seite S' von P' mit $dim(S') = dim(S)$ zugeordnet werden kann. Geben Sie eine mathematisch präzise Definition einer derartigen Abbildung der Menge $\mathcal{S}$ der Seitzen von P auf die Menge $\mathcal{S}'$ der Seiten von P'. Ist diese Abbildung injektiv, surjektiv? Veranschaulichen Sie die Abbildung f und ihre Eigenschaften anhand des folgenden linearen Optimierungsproblems:

$$\min\{x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2 \leq 1\,, x_1 \geq 0\,, x_2 \geq 0\}$$

13. Gegeben sei ein lineares Programm in Standardform der Form $\max\{z(x) = c^t x \,|\, Ax \leq b\,, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}^3$. Sei $B = (x_3, x_4, x_6)$ eine Basis und es gelten folgende Gelichungen (vgl. Darstellung der abhängigen Variablen mit Hilfe der unbhängigen Variablen und der Koeffizieten t_{ij}, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, aus der Vorlesung).

$$\begin{aligned} z(x) &= 10 + c_1 x_1 + x_2 x_2 \\ x_3 &= b_1 + 4x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 \\ x_4 &= 2 - x_1 - 5x_2 - x_5 \end{aligned}$$
$$x_6 = 3 + a_3 x_1 - 3x_2 - 4x_5$$

   Für welche Wahl der Parameter a_1, a_2, a_3, b_1, c_1 und c_2 gelten die folgenden Aussagen:

   (a) B ist nicht zulässig,

   (b) B ist zulässig, aber entartet,

   (c) B ist zulässig, aber nicht optimal,

   (d) B ist optimal,

   (e) B ist zulässig, aber das Problem besitzt keine endliche Optimallösung,

   (f) B ist optimal, aber die Optimallösung ist nicht eindeutig?

14. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Für wahre Aussagen ist ein Beweis anzugeben und für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel.

(a) Gegeben sei ein lineares Programm mit redundanten Restriktionen. Das lineare Programm, das durch Wegwerfen aller redundanten Restriktionen resultiert, ist äquivalent zum ursprünglichen Problem. (Eine Restriktion wird als redundant bezeichnet, wenn das lineare Programm, das sich durch Weglassen dieser einen Restriktion ergibt, äquivalent zum Ausgangsproblem ist.)

(b) Gegeben sei ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen (Vorzeichenbedingungen werden hier nicht mitgezählt), einer Gleichungsrestriktion und n Variablen. Dieses lineare Programm läßt sich stets in ein lineares Programm mit $m-1$ Ungleichungsrestriktionen und $n-1$ Variablen überführen (indem eine Variable aus der Gleichung ermittelt und in das Restproblem eingesetzt wird).

(c) Gegeben sei ein lineares Programm P in 2 Variablen, das eine degenerierte Basislösung besitzt. Dann beinhaltet P eine redundante Restriktion.

(d) Die Maximierung der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 < 0 \\ 4x_1 + 2x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

läßt sich mit Hilfe einer linearen Formulierung in ein lineares Programm integrieren.

(e) Analog zu Aufgabe 14d für die Minimierung dieser Zielfunktion.

15. Betrachten Sie das lineare Programm:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{unter} & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Stellen Sie den zulässigen Bereich des Problem in $\mathbb{R}^2$ geometrisch dar. Bestimmen Sie alle Basen und geben Sie für jede Basis an, ob sie zulässig bzw. entartet ist. Bestimmen Sie zu jeder Basis die dazugehörige Basislösung und geben Sie ggf. die dazugehörige Ecke des Polyeders der zulässigen Lösungen in $\mathbb{R}^2$ an.