Mathematische Optimierung SS 2013
12. Übungsblatt

60. Gegeben sei das folgende binäre Rucksackproblem:

$$\max\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

unter

$$6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 9x_5 \leq 19.$$

Lösen Sie es

(i) mit dynamischer Optimierung und

(ii) mit *Branch and Bound*, wobei zur Schrankenberechnung die lineare Relaxation, also $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$, verwenden werden soll.

61. Ein dynamisches Programmierverfahren für das Rundreiseproblem

(a) Entwerfen Sie ein dynamisches Programmierverfahren für das Rundreiseproblem: Gegeben sind n Städte $\{1, 2, \ldots, n\}$ und eine $n \times n$ Distanzmatrix C und gesucht ist eine Rundreise (=zyklische Permutation) ϕ, die die Kosten $\sum_{i=1}^{n} c_{i\phi(i)}$ minimiert. Hinweis: Führen Sie die Größen $F[i, S]$ mit $S \subset \{1, \ldots, n\} \backslash \{1\}$ und $i \in S$ ein. $F[i, S]$ gibt die Länge des kürzesten Weges an, der beim Knoten 1 beginnt und alle Städte in S genau einmal besucht (und keine anderen Städte) und als letzte Stadt die Stadt $i \in S$ besucht. Überlegen Sie, wie die Berechnung dieser Größen mittels dynamischer Programmierung organisiert werden kann und wie man mit Hilfe dieser Größen die Optimallösung des Rundreiseproblems bestimmen kann.

(b) Wenden Sie das in (a) entworfene Verfahren zur Lösung des Rundreiseproblems mit fünf Städten und folgender Distanzmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 8 & 5 \\ 9 & 2 & 0 & 4 & 12 \\ 8 & 1 & 9 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

62. Lösen das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit Hilfe eines Branch and Bound Verfahrens, das die Obere-Schranken-Dichotomie als Branching-Strategie verwendet:

$$\begin{aligned} \max \quad & 50x_1 + 47x_2 + 44x_3 + 41x_4 + 38x_5 + 36x_6 + 31x_7 + 29x_8 + \\ & 27x_9 + 25x_{10} + 23x_{11} + 21x_{12} + 20x_{13} \\ \text{udNb} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{13} (21 - j)x_j \leq 22 \\ & \sum_{j=1}^{12} x_j = 1 \\ & x_i \in \{0, 1\},\ \text{für } 1 \leq i \leq 13. \end{aligned}$$

Als Menge Q_1 (vgl. Vorlesung) kann $\{1, 2, \ldots, j\}$ für ein passendes $j \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ gewählt werden. Überzeugen Sie sich, dass in diesem Fall die Verwendung der Variablendichotomie als Branching-Strategie einen viel größeren Branch and Bound Baum erzeugen würde[1].

[1] In allen Beispielen dieses Übungsblattes dürfen die linearen Relaxationen mit Hilfe eines Software Pakets, zB. AMPL gelöst werden.

63. Betrachten Sie das folgende binäre lineare Optimierungsproblem mit $n+1$ Variablen, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll} \max & -x_{n+1} \\ \text{udNb.} & \\ & 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n + x_{n+1} = n \\ & x \in \{0,1\}^{n+1} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass für n ungerade jedes Branch-and-Bound Verfahren, das in jedem Knoten des Branch-and-Bound-Baumes den optimalen Wert der jeweiligen linearen Relaxation als obere Schranke verwendet, eine exponentielle Anzahl von Knoten untersuchen muss.

64. Entwerfen Sie ein dynamisches Programmierverfahren für das untenstehende Problem:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \colon y_i + y_{i+1} \leq b_i\,,\ \text{ für } i = 1, 2, \ldots, n-1, y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \right\}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t \in \mathbb{Z}^n$ und $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})^t \in \mathbb{Z}^{n-1}$.

65. Bestimmen Sie die optimale Multiplizierreihenfolge zur Berechnung der Matrix $M_1 M_2 M_3 M_4$, wobei M_1 eine 10×5 Matrix, M_2 eine 5×100 Matrix, M_3 eine 100×3 und M_4 eine 3×40 Matrix ist.

66. (Das Transportparadoxon - Sie können auch AMPL verwenden)

Betrachten Sie das Transportproblem mit der Kostenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 11 & 5 & 35 & 8 & 29 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 35 & 20 & 6 & 40 & 8 & 33 \\ 19 & 2 & 4 & 30 & 10 & 25 \end{pmatrix},$$

dem Angebotsvektor $a = (30,\ 10+\delta,\ 45,\ 30)$ und dem Bedarfsvektor $b = (25,\ 20+\delta,\ 6,\ 7,\ 22,\ 35)$. (Hierbei ist δ ein Parameter aus dem Intervall $[0, 22]$.)

(a) Lösen Sie das obige Transportproblem in Abhängigkeit von δ und zeigen Sie, daß der Zielfunktionswert mit wachsendem δ streng monoton abnimmt.

(b) Welche weiteren Eigenschaften besitzt der Zielfunktionswert, wenn er als Funktion des Parameters δ betrachtet wird, in diesem Beispiel?

(c) Inwiefern gelten die in (b) festgestellten Eigenschaften auf allgemeinerer Basis? Versuchen Sie diesbezüglich eine möglichst allgemeine Aussage aufzustellen und diese dann zu beweisen.

(d) Finden Sie ein einfacheres Beispiel, in dem ein ähnlich paradoxes Verhalten auftritt wie in (a). Versuchen Sie das zugrundeliegende Phänomen zu interpretieren.