

68. Es gilt folgende Aussage (Satz von Ghouila-Houri, 1962): Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist dann und nur dann vollständig unimodular, wenn es für jedes $R \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ eine Partition $R = R_1 \uplus R_2$ gibt mit

$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\},$$

für alle $j = 1, 2, \dots, n$ ¹.

- (a) Sind die Bedingungen des Satzes von Heller und Tompkins (vgl. Vorlesung) notwendig für die vollständige Unimodularität einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \{0, -1, +1\}^{m \times n}$ mit höchstens zwei nicht-Null Einträgen pro Spalte?
- (b) Ist die folgende Matrix vollständig unimodular?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die vollständige Unimodularität der Matrizen A und B nicht hinreichend für die vollständige Unimodularität der Matrix $(A|B)$ ist.
69. Gegeben sei folgende 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Ist die Matrix A vollständig unimodular? (Begründung!)
- (b) Zeigen Sie, daß für alle ganzzahligen Vektoren $b \in \mathbb{R}^3$, für die $P(b) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\}$ nicht-leer ist, alle Ecken von $P(b)$ ganzzahlig sind.
- (c) Wie erklären sich Ihre Antworten zu den beiden vorhergehenden Punkten im Zusammenhang zum Satz von Hoffman und Kruskal aus der Vorlesung? Liegt hier ein Widerspruch vor?
70. Eine $m \times n$ Matrix mit 0-1 Einträgen wird als *Intervallmatrix* bezeichnet, wenn für alle Spalten die 1-Einträge ein Intervall bilden, d.h. daß aus $a_{ij} = a_{kj} = 1$ mit $k > i + 1$ folgt, daß $a_{\ell j} = 1$ für alle $\ell = i + 1, \dots, k - 1$ gilt. Zeigen Sie, daß Intervallmatrizen vollständig unimodular sind.

¹Im Rahmen dieses Übungsbeispiels muss der Satz nicht bewiesen werden. Ambitionierte können versuchen einen Beweis zu erbringen, Interessierte können den Beweis zB. in *B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung, Springer, 2008, Seite 124-125*, nachlesen.