Mathematische Optimierung SS 2012
7. Übungsblatt

50. Betrachten Sie lineare Programme der Form

$$\text{(P)} \qquad \max\{\, c^t x | Ax \le b, x \ge 0 \,\}.$$

Geben Sie für jede der folgenden Möglichkeiten ein konkretes Beispiel an, d.h. spezifizieren Sie für jeden Fall geeignete Eingangsgrößen A, b, c.

(a) P primal und dual zulässig,
(b) P primal zulässig, aber dual unzulässig,
(c) P primal unzulässig, aber dual zulässig,
(d) P primal und dual unzulässig.

51. Zeigen Sie: Hat ein lineares Programm Nebenbedingungen der Form $Cx = d$, wobei C eine $k \times n$ Matrix mit $\text{Rang}(C) < k$ ist, so ist die optimale Lösung des dualen Problems nicht eindeutig.

52. Sei P ein lineares Programm in der Standardform

$$\text{(P)} \qquad \max\{\, c^t x | Ax \le b, x \ge 0 \,\}.$$

Formulieren Sie exakte Kriterien zur Erkennung der Unzulässigkeit bzw. Unbeschränktheit von P im Rahmen des selbst-dualen Simplexverfahrens.

53. Seien die (komponentenweise) positiven Vektoren $p \in \mathbb{R}^n_+$ und $q \in \mathbb{R}^n_+$ so, dass $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$, und sei $\beta \in (0,1)$ eine reelle Zahl. Betrachten Sie das folgende lineare Programm

$$\max\Big\{ \sum_{i=1}^n p_i x_i \colon x \in \mathbb{R}^n , \sum_{i=1}^n \mathrm{q_i x_i} \le \beta \,, \mathrm{x_i} \in [0,1] \,, \forall \mathrm{i} \in \{1,2,\dots,\mathrm{n}\} \Big\}.$$

Es gelte weiters

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots < \frac{p_n}{q_n}.$$

Sei $k := \min\{j \colon q_{j+1} + \cdots + q_n \le \beta$. Sei y_o die zur Restriktion $\sum_{i=1}^n q_i x_i \le \beta$ gehörende duale Variable und sei y_i die zur Restriktion $x_i \le 1$ gehörende duale Variable für $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Ziegen Sie mit Hilfe der Dualitätstheorie, dass die folgenden Vektoren optimal für das primale bzw. duale Problem sind:

$$x_j = \begin{cases} 0 & j < k \\ \frac{\beta - q_{k+1} - \cdots - q_n}{q_k} & j = k \\ 1 & j > k \end{cases} ,$$

$$y_i = \begin{cases} \frac{p_k}{q_k} & i = 0 \\ 0 & 0 < i \le k \\ q_i \left(\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k} \right) & i > k \end{cases} .$$

54. In einem zwei Personenspiel wählt jeder der zwei Spieler A und B eine Zahl zwischen 1 und 100. Das Spiel endet „unentschieden“, wenn beide Spieler die gleiche Zahl wählen. Andernfalls gewinnt der Spieler, der die kleinste Zahl gewählt hat, falls die Differenz zwischen der größeren und der kleineren Zahl mehr als 1 ist. Ansonsten gewinnt der Spieler, der die größere Zahl gewählt hat. Bestimmen Sie eine optimale Strategie für dieses Spiel.

55. Sei $A \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ die *Payoff Matrix* eines zwei Personenspiels (vgl. Vorlesung). Wir sagen, dass die r-te Zeile die s-te Zeile dominiert falls $a_{rj} \geq a_{sj}$, für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Analog dominiert die r-te Spalte die s-te Spalte falls $a_{ir} \geq a_{is}$, für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Zeigen Sie:

    (a) Falls eine Zeile r eine andere Zeile dominiert, dann gibt es eine optimale Strategie y^* des Zeilenspielers mit $y_r^* = 0$.

    (b) Falls eine Spalte s von einer anderen Spalte dominiert wird, dann gibt es eine optimale Strategie x^* des Spaltenspielers mit $x_s^* = 0$.

    Verwenden Sie diese Ergebnisse um die folgende Payoff Matrix auf eine 2×2 Matrix zu reduzieren:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -3 & -8 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

56. (*Das Morra Spiel.*) Zwei Spieler zeigen gleichzeitig jeweils einen oder zwei Finger und jeder Spieler gibt im voraus seine Schätzung für die Gesamtanzahl der von beiden Spielern gezeigten Finger bekannt. Wenn nur einer der Spieler richtig schätzt, dann gewinnt er einen Betrag, der seiner Schätzung entspricht. Ansonsten endet das Spiel „unentschieden“ und keiner der Spieler gewinnt etwas.

    (a) Geben Sie die *Payoff Matrix* dieses Spiels an.

    (b) Formulieren Sie das Problem des Zeilenspielers als lineares Optimierungsproblem. (Das Ziel des Zeilenspielers ist die Minimierung seines erwarteten Verlustes, vgl. Vorlesung).

    (c) Bestimmen Sie die optimalen randomisierten Strategien des Zeilen- bzw. Spaltenspielers und den Wert das Spiels.

57. (*l_1-Regression.*) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ eine gegebene Matrix und $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}}$ ein gegebener Vektor. Zeigen Sie, dass das folgende Optimierungsproblem als lineares Programm formuliert werden kann:

$$\min_{x\in\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}} \sum_{i=1}^{m} \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| .$$

58. Sei $b \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}}$ ein sortierter Vektor mit $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m$. Zeigen Sie mit Hilfe der linearen Optimierung, dass $\frac{b_1+b_m}{2}$ die maximale absolute Abweichung aus b_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, minimiert:

$$\frac{b_1 + b_m}{2} = \operatorname{argmin}_{x\in\mathrm{I\!R}} \max_{i\in\{1,2,\dots,n\}} |x - b_i| .$$