Mathematische Optimierung SS 2012

5. Übungsblatt

33. Bestimmen Sie das duale Problem zu folgendem linearen Programm:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{max} & -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \geq & -1 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 2 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2
\end{array}$$

$$x_1 \text{ frei}, \; x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

34. Ist der Punkte $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung für das folgende lineare Programm?

$$\begin{array}{rl}
\text{maximiere} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\
\text{unter} & x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 - x_5 \leq 4 \\
 & 2x_1 + x_2 \qquad\qquad + 3x_5 \leq 3 \\
 & x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad \leq 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nein, finden Sie eine bessere Lösung. Nehmen Sie dazu auf jeden Fall das duale Programm und den Satz vom komplementären Schlupf zu Hilfe.

35. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{min} & 2\,x_1 & + & 9\,x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{unter} & -2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \geq & 1 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

(a) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(b) Bestimmen Sie Optimallösungen von P und D sowie die zugehörigen optimalen Zielfunktionswerte. (Wählen Sie dazu eine Ihnen vom Rechenaufwand her vorteilhaft erscheinende Vorgangsweise.)

(c) Wie groß darf der Zielfunktionskoeffizient der Variable im Dualproblem D, die zur ersten Restriktion in P korrespondiert, maximal werden, ohne daß sich die Optimallösung von D verändert?

36. Gegeben sei das folgende lineare Programm P

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{min} & -5x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 10 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & \leq & 7 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

(a) Bestimmen Sie die Basislösung von P, die zur Basis $(1, 2, 3, 4)$ korrespondiert.

(b) Stellen Sie das zu P duale lineare Programm D auf.

(c) Prüfen Sie ob die in (a) bestimmte Basislösung eine Optimallösung von P darstellt. Wenn dies nicht der Fall ist, bestimmen Sie eine solche.

(d) Bestimmen Sie eine Optimallösung für D sowie den zugehörigen optimalen Zielfunktionswert.

37. Gegeben sei $\max c^t x$ unter $Ax \leq 0, x \geq 0$. Zeigen Sie: Entweder ist $x = 0$ eine optimale Lösung (es könnte auch noch andere optimale Lösungen geben), oder das Problem ist nach oben unbeschränkt.

38. Sei A eine gegebene symmetrische $n \times n$ Matrix. Betrachten Sie das lineare Programm der Form $\min c^t x$ unter den Restriktionen $Ax \geq c$ und $x \geq 0$. Sei x^* ein Vektor mit $Ax^* = c$ und $x^* \geq 0$. Zeigen Sie, daß x^* eine Optimallösung des gegebenen linearen Programms ist.

39. Dualität für lineare Programme mit Absolutbeträgen.
Bringen Sie ein lineares Programm, von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

(a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable x_1 nicht vorzeichenbeschränkt ist und in der (zu maximierenden) Zielfunktion in der Form $-|c_1 x_1|$ statt als Summand $c_1 x_1$ auftritt;

(b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Restriktion der Form $|\alpha| \leq b$, wobei α eine lineare Funktion in den Variablen $x_1, x_2, \ldots$ (ohne konstantes Glied) und b eine Konstante ist.

40. Gegeben seien reelle Zahlen $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots > c_n$, und folgendes lineare Programm:

$$\max \; c^t x : \quad \text{unter} \quad \sum_i x_i = 3, \quad 0 \leq x_i \leq 1.$$

Stellen Sie das duale Problem dazu auf, und geben Sie (ohne zu rechnen) eine optimale Lösung des primalen und dualen Problems an.