**Kombinatorische Optimierung 2 SS 2015**

**2. Übungsblatt**

9. Formulieren und beweisen Sie eine gewichtete Version des folgenden Satzes von König „In jedem bipartiten Graph ist die Kardinalität eines kardinalitätsmaximalen Matchings gleich der Kardinalität eines kardinalitätsminimalen Knotenüberdeckung“. Zur Erinnerung: Eine Knotenüberdeckung in $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ der Knotenmenge, für die gilt, dass jede Kante $e \in E$ mit mindestens einem Knoten aus $C$ inzidiert.

   Hinweis: Verwenden Sie die Ganzzahligkeit des gebrochenen Matching-Polytops von bipartiten Graphen.

10. Sei $G$ ein Graph und $P$ das gebrochene perfekte Matching-Polytop von $G$. Beweisen Sie, dass die Ecken von $P$ genau die jenigen Vektoren $x$ mit

$$x_e = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } e \in E(C_1) \cup E(C_2) \cup \ldots \cup E(C_k) \\ 1 & \text{für } e \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   sind, wobei $C_1, \ldots, C_k$ paarweise knotendisjunkte ungerade Kreise sind und $M$ ein perfektes Matching in $G - (V(C_1) \cup \ldots \cup V(C_k))$ ist. Berücksichtigen Sie, dass $x \in \mathbb{R}^m$ dann und nur dann eine Ecke eines Polytops $P \subset \mathbb{R}^m$ ist, wenn $x$ ein Extrempunkt von $P$ ist, d.h. wenn es nicht möglich ist, $x$ als konvexe Kombination von Punkten aus $P \setminus \{x\}$ darzustellen.

11. Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$, und zwei Knoten $s$ und $t$. Gesucht wird ein kürzester $s$-$t$-Weg mit einer geraden (oder einer ungeraden) Anzahl von Knoten. Führen Sie dieses Problem auf ein minimal gewichtetes perfektes Matchingproblem zurück.

    Hinweis: Nehmen Sie zwei Kopien von $G$, verbinden Sie jeden Knoten mit seiner Kopie mittels einer Kante mit Gewicht 0 und entfernen Sie dann $s$ und $t$ (oder $s$ und die Kopie von $t$).

12. Sei $(M, \mathcal{F})$ ein laminares Mengensystem mit einer Grundmenge $M$ und einer Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen $F$, $F \subseteq M$. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{F}| = O(n)$ gilt, wobei $n := |M|$.

13. Für bipartite Graphen wird der Algorithmus von Edmonds zur Bestimmung eines perfekten Matchings mit minimalem Gewicht viel einfacher. Welche Teile des Algorithmus sind weiterhin notwendig und welche nicht?

    Bemerkung: Man gelangt so zu der sogenannten *ungarischen Methode* für das lineare Zuordnungsproblem (Kuhn, 1955).

14. Sei $G$ ein Graph mit nichtnegativen Gewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$. Sei $M$ das Matching auf einer beliebigen Zwischenstufe des Edmonds Algorithmus zur Bestimmung eines perfekten Matchings mit minimalem Gewicht. Sei $X$ die Menge der von $M$ ge-matcht-en Knoten. Zeigen Sie, dass jedes Matching $M'$, das alle Knoten aus $X$ matcht, mindestens so teuer wie $M$ ist, d.h. $c(M') := \sum_{e \in M'} c(e) \geq \sum_{e \in M} c(e) =: c(M)$ gilt.

15. Ein Graph mit ganzzahligen Gewichten auf den Kanten hat die *gerade Kreise Eigenschaft* falls das Gesamtgewicht eines jeden Kreises gerade ist. Angenommen der Edmonds Algorithmus zur Bestimmung eines perfekten Matchings mit minimalem Gewicht wird auf einen Graphen mit der obigen Eigenschaft angewendet. Zeigen Sie, dass die gerade Kanten Eigenschaft im Laufe des Algorithmus bzgl. der Schlüpfe erhalten bleibt, und, dass im Laufe des Algorithmus auch eine duale Lösung, die ganzzahlig ist, erhalten bleibt. Folgern Sie daraus, dass es für jeden Graphen eine optimale duale Lösung gibt, die halb-ganzzahlig ist, d.h. $2z$ ist ganzzahlig für jeden Wert $z$ der dualen Variablen.

16. Beim *Botteneck Matching Problem* soll in einem gegeben ungerichteten Graphen mit Kantengtewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ ein perfektes Matching $M^*$ bestimmt werden, sodass folgende Gleichung gilt:

$$\max\{c(e)\colon e \in M^*\} = \min\Big\{\max\{c(e)\colon e \in M^*\}\colon M \text{ ist ein perfektes Matching in } G\Big\}.$$

Kann das Botteneck Matching Problem in $O(n^3)$ Zeit gelöst werden, wobei $n$ die Anzahl der Knoten in $G$ ist ($n := |V(G)|$)?

17. Geben Sie einen polynomiellen Algorithmus zur Lösung des „Minimum Weight Edge Cover Problems" an: In einem gegeben ungerichteten Graphen mit Kantengtewichten $c\colon E(G) \to \mathbb{R}$ soll eine Kantenüberdeckung mit mimimalem Gewicht bestimmt werden, d.h. eine Teilmenge $F \subseteq E(G)$ der Kantenmenge, die alle Knoten überdeckt und das minimale Gesamtgewicht $c(F) := \sum_{e\in F} c(e)$ über alle Kantenmengen mit dieser Eigenschaft hat.

18. Beschreiben Sie die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren aller

    (a) Knotenüberdeckung

    (b) stabilen Mengen

    (a) Kantenüberdeckung

    in einem bipartiten Graphen $G$. Für die Definitionen einer Knoten- bzw. einer Kantenüberdeckung sei auf die Angaben der Übungsbeispiele 9 bzw. 17 verwiesen. Eine stabile Menge $A$ in $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge der Knotenmenge $V$, die einen Teilgraphen $G[A]$ ohne Kanten in $G$ induziert.

    Folgern Sie aus der Beschreibungen der konvexen Hüllen, dass in einem bipartiten Graphen ohne isolierten Knoten $\nu(G) = \tau(G)$ und $\xi(G) = \alpha(G)$ gilt, wobei

    $\tau(G)$ ist die *Knotenüberdeckungszahl*, d.h. die minimale Kardinalität einer Knotenüberdeckung,

    $\xi(G)$ ist *Kantenüberdeckungszahl*, d.h. die minimale Kardinalität einer Kantenüberdeckung, und

    $a(G)$ ist die *Stabilitätzahl*, d.h. die maximale Kardinalität einer stabilen Menge in $G$.