GEWICHTETER MATCHING-ALGORITHMUS

Input: Ein Graph G, Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$.

Output: Ein perfektes mittels der Kanten $\{x, \mu(x)\}$ gegebenes Matching minimalen Gewichtes in G, oder die Antwort, dass G kein perfektes Matching besitzt.

① Setze $\mathcal{B} := \{\{v\} : v \in V(G)\}$ und $K := 0$. Setze $\Delta := 0$.
Setze $z_{\{v\}} := \frac{1}{2}\min\{c(e) : e \in \delta(v)\}$ und $\zeta_{\{v\}} := z_{\{v\}}$ für alle $v \in V(G)$.
Setze $k_v := 0$, $\mu(v) := v$, $\rho^0(v) := v$ und $\varphi^0(v) := v$ für alle $v \in V(G)$.
Markiere alle Knoten als äußere Knoten.

② Setze $t^A := \infty$ für alle $A \in \mathcal{B}$.
For alle äußeren Knoten v **do**: UPDATE(v).

③ („duale Modifizierung")
Setze $\varepsilon_1 := \min\{z_A : A$ maximales inneres Element von $\mathcal{B}$ mit $|A| > 1\}$.
Setze $\varepsilon_2 := \min\{t^A - \Delta - \zeta_A : A$ maximales Element von $\mathcal{B}$ außerhalb des Waldes$\}$.
Setze $\varepsilon_3 := \min\{\frac{1}{2}(t^A - \Delta - \zeta_A) : A$ maximales äußeres Element von $\mathcal{B}\}$.
Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. **If** $\varepsilon = \infty$ **then stop** (G besitzt kein perfektes Matching).
For jedes maximale äußere Element A von $\mathcal{B}$ **do**:
  Setze $z_A := z_A + \varepsilon$ und $\zeta_{A'} := \zeta_{A'} + \varepsilon$ für alle $A' \in \mathcal{B}$ mit $A' \subseteq A$.
For jedes maximale innere Element A von $\mathcal{B}$ **do**:
  Setze $z_A := z_A - \varepsilon$ und $\zeta_{A'} := \zeta_{A'} - \varepsilon$ für alle $A' \in \mathcal{B}$ mit $A' \subseteq A$.
Setze $\Delta := \Delta + \varepsilon$.

④ **If** $\varepsilon = \varepsilon_1$ **then go to** ⑧.
If $\varepsilon = \varepsilon_2$ und $t_x^A - \Delta - \zeta_A = \text{slack}(x, y) = 0$, x äußerer Knoten, $y \in A$ außerhalb des Waldes **then go to** ⑤.
If $\varepsilon = \varepsilon_3$ und $t_x^A - \Delta - \zeta_A = \text{slack}(x, y) = 0$, x, y äußere Knoten, A maximales äußeres Element von $\mathcal{B}$, $x \notin A$, $y \in A$ **then**:
  Sei $P(x) :=$ TREEPATH(x) gegeben durch $(x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2h})$.
  Sei $P(y) :=$ TREEPATH(y) gegeben durch $(y = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2j})$.
  If $P(x)$ und $P(y)$ sind knotendisjunkt **then go to** ⑥, **else go to** ⑦.

⑤ („anwachsen")
Setze $\sigma(\rho^{k_y}(y)) := y$ und $\chi(y) := x$.
Markiere alle Knoten v mit $\rho^{k_v}(v) = \rho^{k_y}(y)$ als innere Knoten.
Markiere alle Knoten v mit $\mu(\rho^{k_v}(v)) = \rho^{k_y}(y)$ als äußere Knoten.
For jeden neuen äußeren Knoten v **do**: UPDATE(v).
Go to ③.

⑥ („augmentieren")
For $i := 0$ **to** $h - 1$ **do**: Setze $\mu(x_{2i+1}) := x_{2i+2}$ und $\mu(x_{2i+2}) := x_{2i+1}$.
For $i := 0$ **to** $j - 1$ **do**: Setze $\mu(y_{2i+1}) := y_{2i+2}$ und $\mu(y_{2i+2}) := y_{2i+1}$.
Setze $\mu(x) := y$ und $\mu(y) := x$.
Markiere diejenigen Knoten v als außerhab des Waldes, für die der Endknoten von BAUMWEG(v) entweder x_{2h} oder y_{2j} ist. Aktualisiere alle Werte von $\varphi^i(v)$ und $\rho^i(v)$ (unter Verwendung von Lemma 10.23).
If $\mu(v) \neq v$ für alle v **then stop**, **else go to** ②.

⑦ („schrumpfen")

Sei $r = x_{2h'} = y_{2j'}$ der erste äußere Knoten von $V(P(x)) \cap V(P(y))$ mit $\rho^{k_r}(r) = r$.
Sei $A := \{v \in V(G) : \rho^{k_v}(v) \in V(P(x)_{[x,r]}) \cup V(P(y)_{[y,r]})\}$.
Setze $K := K + 1$, $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{A\}$, $z_A := 0$ und $\zeta_A := 0$.
For alle $v \in A$ **do**:
    Setze $k_v := k_v + 1$, $b^{k_v}(v) := K$, $\rho^{k_v}(v) := r$, $\varphi^{k_v}(v) := \varphi^{k_v - 1}(v)$.
For $i := 1$ **to** h' **do**:
    If $\rho^{k_{x_{2i}}-1}(x_{2i}) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_{x_{2i}}}(x_{2i}) := x_{2i-1}$.
    If $\rho^{k_{x_{2i-1}}-1}(x_{2i-1}) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_{x_{2i-1}}}(x_{2i-1}) := x_{2i}$.
For $i := 1$ **to** j' **do**:
    If $\rho^{k_{y_{2i}}-1}(y_{2i}) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_{y_{2i}}}(y_{2i}) := y_{2i-1}$.
    If $\rho^{k_{y_{2i-1}}-1}(y_{2i-1}) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_{y_{2i-1}}}(y_{2i-1}) := y_{2i}$.

If $\rho^{k_x - 1}(x) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_x}(x) := y$.
If $\rho^{k_y - 1}(y) \neq r$ **then** setze $\varphi^{k_y}(y) := x$.
For jeden äußeren Knoten $v \notin A$ **do**:
    Setze $t_v^A := t_v^{A'} - \zeta_{A'}$ und $\tau_v^A := \tau_v^{A'}$, wobei A' eine inklusionsmaximale echte Teilmenge von A in $\mathcal{B}$ ist, die $t_v^{A'} - \zeta_{A'}$ minimiert.
Setze $t^A := \min\{t_v^A : v$ ist äußerer Knoten und es gibt kein $\bar{A} \in \mathcal{B}$ mit $A \cup \{v\} \subseteq \bar{A}\}$.
Markiere alle $v \in A$ als äußere Knoten.
For jeden neuen äußeren Knoten v **do**: UPDATE(v).
Go to ③.

⑧ („auspacken")

Sei $A \in \mathcal{B}$ eine maximale innere Blüte mit $z_A = 0$ und $|A| > 1$.
Setze $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{A\}$.
Sei $y := \sigma(\rho^{k_v}(v))$ für ein $v \in A$.
Sei $Q(y) :=$ BLÜTENWEG(y) gegeben durch $(y = r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{2l-1}, r_{2l} = \rho^{k_y}(y))$.
Markiere alle $v \in A$ mit $\rho^{k_v - 1}(v) \notin V(Q(y))$ als außerhalb des Waldes.
Markiere alle $v \in A$ mit $\rho^{k_v - 1}(v) = r_{2i-1}$ für ein i als äußere Knoten.
For alle $v \in A$ mit $\rho^{k_v - 1}(v) = r_{2i}$ für ein i (v bleibt innerer Knoten) **do**:
    Setze $\sigma(\rho^{k_v}(v)) := r_j$ und $\chi(r_j) := r_{j-1}$, wobei $j := \min\{j' \in \{0, \ldots, 2l\} : \rho^{k_{r_{j'}}-1}(r_{j'}) = \rho^{k_v - 1}(v)\}$.
For alle $v \in A$ **do**: Setze $k_v := k_v - 1$.
For jeden neuen äußeren Knoten v **do**: UPDATE(v).
Go to ③.