Kombinatorische Optimierung 1 WS 2010/2011
4. Übungsblatt

26. (a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus von Ford und Fulkerson im Falle von irrationalen Kapazitäten nicht zwangsweise terminiert. Betrachten Sie dazu das Netzwerk aus Abbildung 1. Alle Liniensegmente sind Kanten in beiden Richtungen. Jede Kante hat Kapazität $\frac{1}{1-\sigma}$ bis auf die folgenden 4 Kanten mit den Kapazitäten:

$$u((x_1, y_1)) = 1\,,\ u((x_2, y_2)) = \sigma\,,\ u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2$$

wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Beachten Sie, dass $\sigma^n = \sigma^{n+1} + \sigma^{n+2}$. Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge $(v(f_i))_{i\in\mathbb{N}}$ wobei $v(f_i)$ der Wert des in der i-ten Iteration generierten Flusses ist.

(b) Lösen Sie das obige Problem mit dem Algorithmus von Edmonds und Karp.

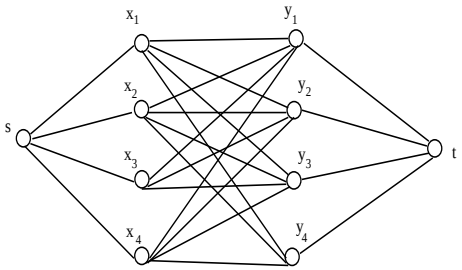

Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 26

27. Flusszerlegung-Satz (Gallai 1958, Ford und Fulkerson 1962)

Sei (G, u, s, t) eine Netzwerk und sei f ein s-t-Fluss mit Wert $val(f)$ in G. Dann gibt es eine Familie $\mathcal{P}$ von s-t-Wegen in G, eine Familie $\mathcal{C}$ von Kreisen in G und Gewichte $w\colon \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$, so dass $f(e) = \sum_{P\in\mathcal{P}\cup\mathcal{C}\colon e\in E(P)} w(P)$ für alle $e \in E(G)$, $\sum_{p\in\mathcal{P}} w(P) = val(f)$ und $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq |E(G)|$.

28. Zeigen Sie, dass man einen blockierenden Fluss in einem azyklischen Netzwerk (G, u, s, t) in $O(nm)$ Zeit ermittlen kann, wobei $n := |V(G)|$ und $m := |E(G)|$. Bestimmen Sie algorithmisch einen blockierenden Fluss für den Level-Graphen in Abbildung 2.

29. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk und f ein s-t-Fluss in G, so dass der Null-Fluss f' in G_f, d.h. $f'(e) = 0$, $\forall e \in E(G_f)$, ein blockierender Fluss in G_f ist. Zeigen Sie, dass f ein maximaler s-t-Fluss ist.

30. Der Satz von Menger

(a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, $s, t \in V$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es k paarweise verschiedene kantendisjunkte Wege von s nach t genau dann, wenn t nach dem Entfernen von $k-1$ beliebigen Kanten weiterhin von s aus erreichbar ist.

(b) Zeigen Sie die Aussage auch für ungerichtete Graphen!

31. Lösen Sie das maximale Flussproblem in Abbildung 3 mit dem Push-Relabel-Algorithmus von Goldberg und Tarjan. Starten Sie mit dem Präfluss, der überall gleich Null ist außer auf die Kanten die in der Quelle starten. Für diese Kanten gilt $f(s, i) = u(s, i)$ für alle $(s, i) \in E$. Initialisieren Sie die Distanzmarkierung mit $\psi(s) = 6$, $\psi(2) = \psi(3) = 2$, $\psi(4) = \psi(5) = 1$, $\psi(t) = 0$.

32. Seien λ_{ij} mit $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, nichtnegative Zahlen mit $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$ und $\lambda_{ik} \geq \min\{\lambda_{ij}, \lambda_{jk}\}$ für paarweise verschiedenen Indizes $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass es einen Graphen G mit $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ und Kapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ gibt, so dass die lokalen Kantenzusammenhangszahlen (vgl. Vorlesung) genau die Zahlen λ_{ij} sind.

    Hinweis: Man betrachte einen spannenden Baum maximalen Gewichtes im vollständigen Graphen (K_n, c) wobei die Gewichte durch $c((i, j)) := \lambda_{ij}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, gegeben sind.

33. Gomory-Hu Bäume

    Sei G ein ungerichteter Graph und $u\colon E(G) \to \mathbb{R}_+$ eine Kapazitätsfunktion. Ein Baum T heißt Gomory-Hu-Baum für (G, u) falls $V(T) = V(G)$ und die lokalen Kantenzusammenhangszahlen λ_{pq} folgendermaßen gegeben sind :

$$\lambda_{pq} = \min_{e \in E(P_{pq})} u(\delta_G(C_e)), \text{ für alle } p, q \in V(G),\ p \neq q.$$

    P_{pq} ist der (eindeutig bestimmte) p-q-Weg in T und C_e und $V(G) \setminus C_e$ sind die Zusammenhangskomponenten von $T - e$, für $e \in E(T)$. Es ist bekannt, dass jeder ungerichteter Graph einen Gomory-Hu-Baum besitzt und dieser in $O(|V(G)|^3 |E(G)|)$-Zeit bestimmt werden kann (Gomory und Hu 1961, siehe zB. [1], Abschnitt 8.6).

    Zeigen Sie anhand des Beispiels von $K_{3,3}$ mit Einheitskapazitäten $u(e) = 1$, $\forall e \in E(K_{3,3})$, dass i.A. ein Gomory-Hu-Baum von (G, u) nicht als Teilgraph von G gewählt werden kann.

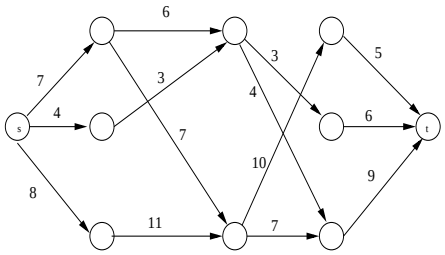

Abbildung 2: Blockierender Fluss für Bsp. 28

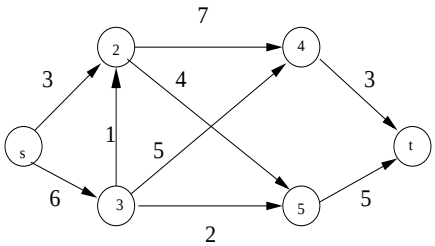

Abbildung 3: Push-Relabel Algorithmus für Bsp. 31

Literatur

[1] B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung:Theorie und Algorithmen, Springer , 2008.