Grundbegriffe der Mathematik, WS 2011/2012, 4. Übungsblatt

31. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Beziehung gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\,.$$

32. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Beziehung gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\ldots+n)^2\,.$$

33. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgende Beziehung gilt:
$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{n!}\,.$$

34. Bestimmen Sie die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, sowie die Anzahl derjenigen k-elementigen Teilmengen, die a_1 enthalten, bzw. die Anzahl derjenigen k-elementigen Teilmengen, die a_1 nicht enthalten. Folgern Sie daraus den Additionssatz für Binomialkoeffizienten:
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},\ \forall n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n\,.$$

35. Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz durch vollständige Induktion: In einem kommutativen Ring R gilt
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$
für $x, y \in R$ und $N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

36. Beweisen Sie:
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}\ \forall m, n, k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n \leq m.$$

37. Zeigen Sie, dass die durch
$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} a \cdot d \geq b \cdot c$$
definierte Relation auf der Menge der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
   (a) wohldefiniert ist., d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Brüche abhängt, und
   (b) eine Totalordnung ist.

38. Zeigen Sie, dass die durch
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
definierte Multiplikation rationaler Zahlen wohldefiniert ist, d.h., nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Brüche abhängt.

39. Beweisen Sie: Für alle $1 \leq m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, gilt die Beziehung
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$