Aussagenlogik: Definitionen und Sätze

1 Aussagenlogik

Definition 1.1 *Eine* **Aussage** *ist ein sprachlicher Satz, der seinem Inhalt entsprechend wahr oder falsch ist.*

Definition 1.2 *(Verknüpfungen)*
Konjunktion, logisches Und*: Seien p und q zwei Aussagen. Die Konjunktion von p und q wird mit $p \wedge q$ bezeichnet und ist dann und nur dann wahr, wenn beide Aussagen war sind.*
Wahrheitstafel:

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Disjunktion, logisches Oder*: Seien p und q zwei Aussagen. Die Disjunktion von p und q wird mit $p \vee q$ bezeichnet und ist dann und nur dann wahr, wenn mindestens eine der beide Aussagen war ost.*
Wahrheitstafel:

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Negation*: Seien p eine Aussage. Die Negation von p wird mit $\neg p$ bezeichnet und ist dann und nur dann wahr, wenn p falsch sind.*
Wahrheitstafel:

p	$\neg p$
W	F
F	W

Subjunktion, Wenn-Dann: Seien p und q zwei Aussagen. Die Subjunktion von p und q wird mit $p \to q$ bezeichnet und ist dann und nur dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist.
Wahrheitstafel:

p	q	$p \to q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	F

Äquivalenz: Seien p und q zwei Aussagen. Die Äquivalenz von p und q ist eine Aussage, die mit $p \leftrightarrow q$ bezeichnet wird und dann und nur dann wahr ist, wenn entweder p und q beide wahr oder beide falsch sin.
Wahrheitstafel:

p	q	$p \leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Satz 1.3 *(Rechenregeln für logische Verknüpfungen)*
Seien p, q, r Aussagen. Dann gilt Folgendes:

1. $\neg\neg p$ *ist gleichwertig zu* p.
2. $\neg(p \wedge q)$ *ist gleichwertig zu* $\neg p \vee \neg q$. *(Regel von de Morgan)*
3. $\neg(p \vee q)$ *ist gleichwertig zu* $\neg p \wedge \neg q$. *(Regel von de Morgan)*
4. $p \to q$ *ist gleichwertig zu* $(\neg q) \to (\neg p)$.
5. $p \wedge (q \vee r)$ *ist gleichwertig zu* $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. *(Distributionsgesetz)*
6. $p \vee (q \wedge r)$ *ist gleichwertig zu* $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. *(Distributionsgesetz)*

Definition 1.4 *Ein logischer Ausdruck heißt*

- **disjunktive Normalform**, *wenn er die Gestalt*

  $$D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee \ldots \vee D_n$$

  hat und jedes der D_i, $1 \leq i \leq n$, die Gestalt

  $$E_1^{(i)} \wedge E_2^{(i)} \wedge E_3^{(i)} \wedge \ldots \wedge E_{k_i}^{(i)}$$

  hat, wobei $E(i)_j$, $1 \leq j \leq k_i$, Aussagen oder verneinte Aussagen sind.

- **subjunktive Normalform**, *wenn er die Gestalt*

  $$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \ldots \wedge D_n$$

  hat und jedes der D_i, $1 \leq i \leq n$, *die Gestalt*

  $$E_1^{(i)} \vee E_2^{(i)} \vee E_3^{(i)} \vee \ldots \vee E_{k_i}^{(i)}$$

  hat, wobei $E(i)_j$, $1 \leq j \leq k_i$, *Aussagen oder verneinte Aussagen sind.*

Satz 1.5 *(Beweistechniken)*
Seien p, q, r *Aussagen. Dann gilt Folgendes:*

1. *Direkter Beweis:* $p \wedge (p \to q)$ *impliziert* q.
2. *Indirekter Beweis:* $(\neg q) \wedge (p \to q)$ *impliziert* $\neg p$.
3. *Fallunterscheidung:* $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$ *impliziert* q.
4. *Verkettung:* $(p \to q) \wedge (q \to r)$ *impliziert* $p \to r$.
5. *Widerspruch, Reduction ad Absurdum:* $(p \to q) \wedge (p \to \neg q)$ *impliziert* $\neg p$.

Definition 1.6 *Die Reihung der logischen Verknüpfungen nach Priorität in absteigender Reihenfolge:* $\neg$, $\wedge$ *und* $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Definition 1.7 *(Tautologie und Kontradiktion) Eine Aussage die immer wahr ist heißt Tautologie, eine Aussage die immer falsch ist heißt Kontradiktion.*

Definition 1.8 *(Aussageform)*
Eine Aussageform $A(x)$ *ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen* x *enthält und für jeden Wertzuordnung dieser Variablen zu einer Aussage wird.*

Definition 1.9 *(Quantoren)*
Sei $A(x)$ *eine Aussageform.*

- *Der Ausdruck* $\forall x : A(x)$ *ist als „Für alle* x *gilt* $A(x)$*" zu verstehen.*
- *Der Ausdruck* $\exists x : A(x)$ *ist als „Es existiert mindestens ein* x*, für das* $A(x)$ *gilt" zu verstehen.*

Notation für „Es existiert genau ein": $\exists!$.

Satz 1.10 *(Negation von Quantoren)*

- $\neg(\forall x\colon A(x))$ *ist gleichwertig zu* $\exists x\colon \neg A(x)$, *oder* $\neg(\forall x\colon A(x)) \equiv \exists x\colon \neg A(x)$, *wobei* $\equiv$ *eine Notation für „gleichwertig zu" ist.*
- $\neg(\exists x\colon A(x))$ *ist gleichwertig zu* $\forall x\colon \neg A(x)$, *oder* $\neg(\forall x\colon A(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon \neg A(x)$, *wobei* $\Leftrightarrow$ *eine andere Notation für „gleichwertig zu" ist.*