

6. Übungsblatt

30. Zeigen Sie, dass die untenstehenden in der Vorlesung eingeführten Formulierungen des Markowitz'schen Portfoliooptimierungsproblems äquivalent sind.

$$(a) \quad \begin{array}{ll} \max & \mu^T x \\ \text{udNB} & \\ & x^T \Sigma x \leq \sigma^2 \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{ll} \max & \mu^T x - \lambda x^T \Sigma x \\ \text{udNB} & \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ll} \min & x^T \Sigma x \\ \text{udNB} & \\ & \mu^T x \geq r \\ & x \in \mathcal{X} \end{array} \quad (2)$$

Präziser formuliert: Nehmen Sie an, dass die Menge der zulässigen Portfolii $\mathcal{X}$ aus jener Portfolii besteht, die die Bedingungen $Ax = b$ und $Cx \geq d$ mit $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $d \in \mathbb{R}^p$ erfüllen. Sei $x^{(\lambda)}$ eine optimale Lösung des Problems (b) in (1) für $\lambda > 0$. Analog seien $\bar{x}^{(r)}$ und $\tilde{x}^{(\sigma^2)}$ optimale Lösungen des Problems (2) bzw. des Problems (a) in (1) für $r > 0$ bzw. $\sigma^2 > 0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $\lambda > 0$ ein σ^2 und ein r gibt, sodass $x^{(\lambda)}$ auch eine optimale Lösung vom Problem (a) in (1) bzw. vom Problem (2) ist. Analog gibt es für jedes $r > 0$ ein $\sigma^2 > 0$ und ein $\lambda > 0$, sowie für jedes $\sigma^2 > 0$ ein dazugehöriges $r > 0$ und ein dazugehöriges $\lambda > 0$, sodass die Optimallösung $\bar{x}^{(r)}$ und $\tilde{x}^{(\sigma^2)}$ des einen Problems auch für die anderen zwei Probleme jeweils optimal sind.

31. Wir betrachten ein Portfolio bestehend aus 5 Aktien deren erwarteten jährlichen Erträge bzw. deren Kovarianzmatrix in der untenstehenden Tabelle angegeben sind. Wir betrachten stets zwei Szenarien: (a) leer Verkäufe sind erlaubt und (b) leer Verkäufe sind nicht erlaubt.

Asset	Kovarianzen ($\times 10^{-2}$)					μ_i (in %)
1	2.30	0.93	0.62	0.74	-0.23	15.1
2		1.40	0.22	0.56	0.26	12.5
3			1.80	0.78	0.27	14.7
4				3.40	-0.56	9.02
5					2.60	17.68

- (i) Formulieren Sie ein lineares Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit maximalem erwarteten Ertrag. Lösen Sie dieses LP (einfach durch Inspektion) und bestimmen Sie somit den maximalen erwarteten Portfolioertrag $r_{\max}$ für beide Szenarien (a) und (b). Welche Varianz hat das optimale Portfolio?
- (ii) Formulieren Sie ein quadratisches Programm zur Bestimmung eines Portfolios mit minimaler Varianz. Lösen Sie dieses QP und bestimmen Sie somit die minimale erwartete Portfoliovarianz für beide Szenarien (a) und (b). Welchen Ertrag $r_{\min}$ hat das optimale Portfolio?
- (iii) Für jedes der zwei Szenarien (a) und (b) lösen Sie das Problem (2) (mit einer passenden Menge von zulässigen Portfolii $\mathcal{X}$) für unterschiedliche Werte r zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$. Skizzieren und vergleichen Sie dann die *effiziente Front* (oder *Pareto Front*) der beiden Szenarien.
32. Das MAD Modell (man absolute deviation), Konno und Yamazaki 1991)
 Betrachten Sie n Aktien S_i deren zufälligen Rendite R_i einen Erwartungswert μ_i besitzen. Sei $\Sigma = (\sigma_{ij})$ die Kovarianzmatrix von $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ und $\sigma(x)$ die Varianz eines Portfolios $x := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ und $0 \leq x_i \leq m_i$, für $1 \leq i \leq n$. Sei $w(x) = E \left[\left| \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right| \right]$ die erwartete absolute Abweichung des Portfolioreturns vom eigenen Erwartungswert.

- (a) Zeigen Sie, dass $w(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(x)$ gilt, falls $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ multivariat normalverteilt ist. Schließen Sie daraus, dass in diesem Fall das „mean-variance“ Portfoliooptimierungsmodell von Markowitz äquivalent zum untenstehenden sogenannten MAD Modell ist:

$$\begin{aligned} \min \quad & E \left[\left| \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \right| \right] \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \geq r \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & 0 \leq x_i \leq m_i \end{aligned} \quad ,$$

vorausgesetzt in beiden Fällen wird über die gleiche Menge von zulässigen Portfolii optimiert.

- (b) Sei r_{it} die in der Periode t realisierte Rendite der Aktie i , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq t \leq T$. Es wird angenommen, dass die Realisierungen r_{it} als Zeitreihen verfügbar sind und, dass die erwarteten Rendite als $\mu_i := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}$ berechnet werden. Lässt sich das obige MAD Modell als lineares Optimierungsproblem formulieren (ganz unabhängig von der Verteilung des Zufallsvektors $(R_1, R_2, \dots, R_n)$)?
33. Zeigen Sie mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, dass eine optimale Lösung $\bar{\mu}$ des untenstehenden Problems (vgl. Vorlesung)

$$\begin{aligned} \min \quad & (\mu - \pi)^T (\tau \Sigma)^{-1} (\mu - \pi) \\ \text{u.d.Nb.} \quad & \end{aligned}$$

$$P\mu = q$$

folgendermaßen gegeben ist:

$$\bar{\mu} = \pi + (\tau \Sigma) P^T [P(\tau \Sigma) P^T]^{-1} (q - P\pi) .$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ sind $\tau \in \mathbb{R}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\pi \in \mathbb{R}^n$, $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $q \in \mathbb{R}^m$ vorgegebene konstante Größen und $\mu \in \mathbb{R}^n$ ist ein zu bestimmender Vektor (vgl. Vorlesung).