11. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
(i) $\emptyset \subseteq \emptyset$, (ii) $\emptyset \in \emptyset$, (iii) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, (iv) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
(v) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$, (vi) $\{a, b\} \in \{a, \{\{a, b\}\}, b\}$.

12. Es sei M_j, $j \in J$, ein System von Mengen mit $\cap_{j\in J} M_j = \emptyset$. Gibt es stets zwei Mengen $M_{j_1}, M_{j_2} \in F$ mit $M_{j_1} \cap M_{j_2} = \emptyset$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

13. Man zeige für beliebige endliche Teilmengen A und B einer Menge R:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Man leite daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her. (Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet).

14. Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und A, $B \subseteq M$ sowie $C, D \subseteq N$. Man beweise:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Es gilt nicht notwendig „=“ (Beispiel!)
(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

15. A und B seien Mengen, f eine Abbildung von A in B, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Dann gilt:

(a) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$ (b) $N \supseteq f(f^{-1}(N))$

Man beweise diese Aussagen.

16. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 11$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Geben Sie weiters gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

17. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f : D \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2+8}{x+1}$ eine Funktion ist. Bestimmen Sie weiters das Bild von f. Ist f bijektiv?

18. Sei $f : M \to N$ gegeben, $M \neq \emptyset$. Man zeige:

(a) f ist surjektiv $\Leftarrow$ es gibt ein $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
(b) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt ein $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.