1. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage?
   (a) Wien ist die Hauptstadt Österreichs.
   (b) Ist n gerade, dann ist $n+2$ ungerade.
   (c) $x > y$

2. Sind folgende Aussagen Tautologien, oder Kontradiktionen, oder weder noch?
   (a) $(a \vee \neg a) \wedge (b \vee \neg b)$.
   (b) $(a \wedge \neg a) \wedge (a \leftrightarrow b)$.
   (c) $(p \wedge \neg p) \wedge (((q \vee \neg q) \rightarrow p) \leftrightarrow q)$.

3. Kommissar X weiß über die 4 Tatverdächtigen P, Q, R und S:
   (a) P ist genau dann schuldig, wenn Q unschuldig ist.
   (b) R ist genau dann unschuldig, wenn S schuldig ist.
   (c) Falls S Täter ist, dann auch P und umgekehrt.
   (d) Falls S schuldig ist, dann ist Q beteiligt.

   Wer ist Täter?

4. Drei Personen: A, B, C machen folgende Aussagen: A: Wenn B lügt, sagt C die Wahrheit. B: C lügt. C: A lügt. Wer lügt und wer sagt die Wahrheit?

5. Mayer, Schmied und Weber sind Pilot, Kopilot und Steward einer AUA-Maschine, allerdings nicht unbedingt in der genannten Reihenfolge. Im Flugzeug befinden sich drei Reisende mit denselben drei Nachnamen. Um sie von der Besatzung zu unterscheiden, erhalten sie im folgenden ein „Herr“ vor ihre Namen. Wir wissen:
   (a) Herr Weber wohnt in Graz.
   (b) Der Kopilot wohnt in Klagenfurt.
   (c) Herr Schmied hat bereits vor langer Zeit seine Schulkenntnisse der Mathematik vergessen.
   (d) Der Fluggast, der denselben Nachnamen wie der Kopilot hat, lebt in Wien.
   (e) Der Kopilot und einer der Passagiere, ein Mathematik-Professor, wohnen im gleichen Ort.
   (f) Mayer besiegte den Steward beim Pokern.

   Folgern Sie logisch daraus, wie der Pilot heißt!

6. Verneinen Sie die Aussage
   $$\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R} : f(a) = f(b) \leftrightarrow a^2 = b.$$
   (In der Antwort soll kein „$\neg$“ mehr vorkommen, wohl erlaubt ist „$\neq$“.)

7. Drücken Sie die folgenden Mengen durch Angabe einer Eigenschaft formal aus:
   (a) $M = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \ldots\}$,
   (b) $M = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots\}$,
   (c) $M = \{1/2, 1/3, 1/5, 1/7, 1/11, 1/13, 1/17, 1/19, 1/23, 1/29, 1/31, \ldots\}$.

8. Sei $M = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Wie viele Elemente enthält die Potenzmenge von M?

9. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig? Geben Sie für wahre Aussagen einen Beweis und zu falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.
   (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,
   (b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$,
   (c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$,
   (d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

10. Wahr oder falsch? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu folgender Aussage an:
    Für alle Mengen A und B gilt: Wenn $\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A) = \emptyset$, so gilt $B \subseteq A$.

11. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
(i) $\emptyset \subseteq \emptyset$, (ii) $\emptyset \in \emptyset$, (iii) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, (iv) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
(v) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$, (vi) $\{a, b\} \in \{a, \{\{a, b\}\}, b\}$.

12. Es sei M_j, $j \in J$, ein System von Mengen mit $\cap_{j \in J} M_j = \emptyset$. Gibt es stets zwei Mengen $M_{j_1}, M_{j_2} \in F$ mit $M_{j_1} \cap M_{j_2} = \emptyset$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

13. Man zeige für beliebige endliche Teilmengen A und B einer Menge R:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Man leite daraus eine entsprechende Formel für $|A \cup B \cup C|$ her. (Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet).

14. Es sei f eine Abbildung der Menge M in die Menge N und A, $B \subseteq M$ sowie $C, D \subseteq N$. Man beweise:

    (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
    (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Es gilt nicht notwendig „=“ (Beispiel!)
    (c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
    (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

15. A und B seien Mengen, f eine Abbildung von A in B, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Dann gilt:

    (a) $M \subseteq f^{-1}(f(M))$ (b) $N \supseteq f(f^{-1}(N))$

    Man beweise diese Aussagen.

16. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 11$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Geben Sie gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Geben Sie weiters gegebenenfalls eine möglichst große Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : \mathbb{R} \to B$ surjektiv ist.

17. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass $f : D \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2+8}{x+1}$ eine Funktion ist. Bestimmen Sie weiters das Bild von f. Ist f bijektiv?

18. Sei $f : M \to N$ gegeben, $M \neq \emptyset$. Man zeige:

    (a) f ist surjektiv $\Leftarrow$ es gibt ein $g : N \to M$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
    (b) f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt ein $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

19. Seien f, g bijektive Abbildungen von M nach M. Zeigen Sie, dass auch $f \circ g$ eine bijektive Abbildung von M nach M ist.

20. Sei $M = \mathcal{P}(\{2,3,4\})$ und R jene Relation auf M, die durch $iRj \iff |i| \leq |j|$ definiert ist. Ist diese Relation eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation, beides, oder keines von beiden?

21. Untersuchen Sie, ob die folgende Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Klasseneinteilung. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?

    (a) $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $(i, j) \in R \Leftrightarrow$ (es gibt eine positive ganze Zahl x, die kleiner als i und kleiner als j ist).

    (b) $A = \mathbb{N}$ und $R = \{\, (i, i+1) \mid i \in \mathbb{N} \,\}$.

22. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe, M eine Menge und $H := \{f : M \to G\}$ die Menge der Funktionen von M nach G. Wir definieren auf H die Operation $\odot$ durch $f \odot g : M \to G;\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$. Zeigen Sie, dass $(H, \odot)$ eine Gruppe bildet.

23. Betrachten Sie die Menge $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und die assoziative Operation $\circ$, die durch $a \circ b = a + b + ab$ festgelegt ist. Ist $(G, \circ)$ eine Halbgruppe? Hat $(G, \circ)$ ein neutrales Element?

24. Betrachten Sie die Menge $G = \{\text{wahr, falsch}\}$ mit der ODER-Operation '$\vee$'. Gilt in $(G, \vee)$ das Assoziativgesetz? Hat $(G, \vee)$ ein neutrales Element? Ist $(G, \vee)$ eine Gruppe?

25. Untersuchen Sie, ob die folgende Relationen $R \subseteq A \times A$ transitiv, reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen? Bestimmen Sie für diese die Klasseneinteilung. Welche Relationen sind Ordnungsrelationen?

    (a) $A = \mathbb{Z}$ und $(i, j) \in R \Leftrightarrow |i| = |j|$.

26. Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 7k + 12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4}$$

    gilt.

27. Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

28. Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen.

    (a) $15 - x^2 + 2x > 0$,

    (b) $x + 4 < \dfrac{x+4}{2x-3}$,

    (c) $\dfrac{x}{x+2} > \dfrac{x+3}{3x+1}$,