45. Der dreifache Paritätscheckcode werde um ein Paritätscheckbit erweitert, d.h., das Wort *abc* werde durch *abcxyzp* codiert, wobei

$$a + b + z = a + c + y = b + c + x = a + b + c + x + y + z + p = 0.$$

Was sind die Parameter (Blocklänge, Dimension, Minimaldistanz) dieses Codes?

46. Der ternäre (also über $\mathbb{F}_3 = \{0, +1, -1\}$) $(8,7)$-Checkcode entsteht durch das Anhängen eines Prüftrits (i.e., einer ternären Ziffer) zu jedem Block der Länge sieben, wobei die Summe der Trits 0 wird. Zeigen Sie, dass dieser Code alle ein-trit Fehler und manche zwei-trit Fehler erkennt.

47. Der Binärcode C habe Prüfmatrix (in Standardform, d.h., die letzten Spalten sind eine Einheitsmatrix) M_C. Der ternäre Code D habe dieselbe Prüfmatrix. Wie ist der Zusammenhang zwischen den Codewörtern von C und D? Zeigen Sie, dass C und D dieselbe Dimension haben. Zeigen Sie: wenn C Minimaldistanz ≥ 3 hat, dann hat D ebenfalls Minimaldistanz ≥ 3.

48. Binäre 16-Bit-Wörter seien zu codieren. Wie viele Check-Bits müssen hinzugefügt werden, um einen ein-bit-korrigierenden Code zu erhalten? Geben Sie die Generatormatrix eines solchen Codes an.

49. Seien C und D lineare Codes der Blocklänge n, wobei C die Dimension m und D die Dimension ℓ habe. Der Code C habe Minimaldistanz d und D habe Minimaldistanz $2d$. Zeigen Sie, dass der Code X, der aus allen Wörtern der Form $(u, u+v)$ mit $u \in C$ und $v \in D$ besteht, ein linearer Code der Blocklänge $2n$, Dimension $m+\ell$ und Minimaldistanz $2d$ ist.

50. Sei D ein linearer $(8,5)$-Code, wobei die folgenden Paritätschecks einem Wort *abcde* angefügt werden: $x = a+b+e$, $y = a+b+c+d$ und $z = b+d+e$. Geben Sie eine Tabelle der „Coset leaders“ für alle Syndrome (i.e. $M \cdot x$ für die Prüfmatrix M und $x \in \mathbb{F}_2^8$) an. Geben Sie zwei Fehlermuster vom Gewicht 1 an, die dasselbe Syndrom haben. Konstruieren Sie einen binären $(9,5)$-Code, der ein-Bit-Fehler korrigieren kann, indem Sie ein weiteres Prüfbit anhängen.

51. Schreiben Sie ein Programm, das einen Text aus den Buchstaben „a“ – „z“, „A“ – „Z“, „0“ – „9“, „ “, „.“, „,“, „;“ codiert, sodass ein-Bit-Fehler korrigiert werden können. Schreiben Sie weiters einen Fehlerprozessor und einen Decodierer.

52. Zeigen Sie, dass ein ternärer Code genau dann alle ein-Trit-Fehler korrigieren kann, wenn keine zwei Spalten der Prüfmatrix Summe oder Differenz 0 haben.

53. Benutzen Beispiel 52, um einen ternären Hammingcode $\mathrm{Hamming}_3(k)$ mit Prüfmatrix $H_{3,k}$ zu konstruieren, wobei die Spalten von $H_{3,k}$ alle von Null verschiedenen ternären Vektoren bestehen, deren erster von Null verschiedener Eintrag gleich $+1$ ist. Bestimmen Sie die Blocklänge und den Dimension des Codes und zeigen Sie, dass er perfekt ist.

54. Beispiel 53 für beliebigen Grundkörper $\mathbb{F}_q$.