32. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ ein Polynom vom Grad $m \geq 1$ mit $f(0) \neq 0$, das in seinem Zerfällungskörper über $\mathbb{F}_q$ lauter einfache Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ besitze. Zeigen Sie, dass die Ordnung von f die kleinste positive ganze Zahl e mit $\alpha_i^e = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$ ist.

33. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(G_n) = n$ für alle n gilt, für die das Kreisteilungspolynom $G_n \in \mathbb{F}_q[X]$ definiert ist.

34. Sei f irreduzibel über F_q mit $f(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(f) = e$ für zu q teilerfremde e genau dann gilt, wenn f das Kreisteilungspolynom G_e teilt.

35. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ ein Polynom vom Grad $m \geq 1$ mit $f(0) \neq 0$, das in seinem Zerfällungskörper über $\mathbb{F}_q$ lauter einfache Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ besitze. Wie hängen die Ordnungen von f^b und von f zusammen ($b \in \mathbb{N}$)?

36. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ ein nicht-konstantes Polynom mit $f(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(f(x^p)) = p \operatorname{ord}(f(x))$ gilt, wobei $q = p^n$.

37. Sei $f \in \mathbb{F}_q[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad $m \geq 1$. Zeigen Sie, dass f genau dann primitiv über $\mathbb{F}_q$ ist, wenn f ein irreduzibler Faktor des Kreisteilungspolynoms $G_d \in \mathbb{F}_q[X]$ für $d = q^m - 1$ ist.

38. Bestimmen Sie die Anzahl der primitiven Polynome über $\mathbb{F}_q[X]$ vom Grad m.

39. Zeigen Sie, dass es höchstens $(q^n - q)/n$ irreduzible Polynome vom Grad n über $\mathbb{F}_q$ gibt. Zeigen Sie weiters, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn n eine Primzahl ist.

40. Zeigen Sie, dass die Kreisteilungspolynome G_{19} und G_{27} denselben Grad haben und beide über $\mathbb{F}_2$ irreduzibel sind.

41. Faktorisieren Sie $X^{32} - X$ über $\mathbb{F}_2$ in irreduzible Faktoren.

42. Faktorisieren Sie das Polynom

$$\begin{aligned} &X^{34} + 2X^{32} + 2X^{30} + 2X^{29} + 2X^{28} + 2X^{27} + 2X^{25} + X^{23} + X^{21} + X^{20} + X^{19} \\ &\quad + X^{18} + 2X^{16} + X^{14} + X^{12} + X^{11} + X^{10} + X^{9} + X^{7} + 2X^{5} + 2X^{3} + 2X^{2} + 2X + 2 \end{aligned}$$

über

(a) $\mathbb{F}_3$,

(b) $\mathbb{F}_9$.

43. Sei $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$ für ein passendes α. Faktorisieren Sie $X^5 + \alpha X^4 + X^3 + (1+\alpha)X + \alpha$ über $\mathbb{F}_4$.

44. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen normierten irreduziblen Faktoren von $x^4 + 1$ über $\mathbb{F}_p$ für alle ungeraden Primzahlen p.