24. Die *Möbiussche μ-Funktion* $\mu : \mathbb{N} \to \{0, \pm 1\}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{falls } n = p_1 \dots p_r \text{ für } r \geq 0 \text{ paarweise verschiedene Primzahlen } p_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = [n = 1] \qquad \text{(Iverson-Notation).}$$

25. Zeigen Sie die *Möbiussche Umkehrformel*: Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen mit

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d), \qquad n \in \mathbb{N}$$

gilt.

26. Beweisen Sie:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hier ist φ die Eulersche und μ die Möbiussche Funktion.

27. Sei r eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie folgende Formel für das Kreisteilungspolynom G_{r^k}:

$$G_{r^k}(x) = 1 + x^{r^{k-1}} + x^{2r^{k-1}} + \cdots + x^{(r-1)r^{k-1}}.$$

28. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$$

nur dann über K irreduzibel sein kann, wenn n eine Primzahl ist.

29. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von Kreisteilungspolynomen:

(a) $G_{mp}(X) = G_m(X^p)/G_m(X)$ für eine Primzahl p und $m \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid m$.

(b) $G_{mp}(X) = G_m(X^p)$ für alle $m \in \mathbb{N}$, die durch die Primzahl p teilbar sind.

(c) $G_{mp^k}(X) = G_{mp}(X^{p^{k-1}})$ für eine Primzahl p und beliebige m, $k \in \mathbb{N}$,

(d) $G_{2n}(X) = G_n(-X)$ für $n \geq 3$ und ungerades n,

(e) $G_n(0) = 1$ für $n \geq 2$,

(f) $G_n(X^{-1})X^{\varphi(n)} = G_n(X)$ für $n \geq 2$, wobei φ die Eulersche Funktion ist,

(g)

$$G_n(1) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n = 1, \\ p, & \text{wenn } n \text{ eine Potenz der Primzahl } p \text{ ist,} \\ 1, & \text{wenn } n \text{ zumindest zwei verschiedene Primfaktoren hat.} \end{cases}$$

30. Bestimmen Sie die Ordnung des Polynoms $(X^2 + X + 1)^5(X^3 + X + 1)$ über $\mathbb{F}_2$.

31. Bestimmen Sie die Ordnung des Polynoms $X^7 - X^6 + X^4 - X^2 + X$ über $\mathbb{F}_3$.