1. Sei p eine Primzahl und $0 \leq j \leq p-1$. Zeigen Sie, dass $\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod{p}$.
2. Sei R ein kommutativer Ring der Charakteristik $p > 0$ (prim). Zeigen Sie, dass
$$(a-b)^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} a^j b^{p-1-j}, \qquad a, b \in R.$$
3. Bestimmen Sie die Additions- und Multiplikationstabelle von $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X)$. Handelt es sich um einen Körper?
4. Gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{F}_3[X]$, sodass $(X^2+1)f(X) \equiv 1 \pmod{X^3+1}$? Geben Sie gegebenenfalls ein solches an.
5. Gibt es ein Polynom $f \in \mathbb{F}_3[X]$, sodass $(X^4+X^3+X^2+1)f(X) \equiv (X^2+1) \pmod{X^3+1}$? Geben Sie gegebenenfalls ein solches an.
6. Bestimmen Sie $f(2)$ für $f(X) = X^{2007} + X^{308} \in \mathbb{F}_9[X]$.
7. Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(0) \equiv f(1) \equiv 1 \pmod{2}$. Zeigen Sie: f hat keine ganzzahligen Nullstellen.
8. Zeigen Sie: $\sum_{\alpha \in \mathbb{F}_q} \alpha = 0$ für Primzahlpotenzen $q > 2$.
9. Bestimmen Sie alle primitiven Elemente (Erzeuger der multiplikativen Gruppe) von
   (a) $\mathbb{F}_7$,
   (b) $\mathbb{F}_{17}$,
   (c) $\mathbb{F}_9$.
10. Schreiben Sie alle Elemente von $\mathbb{F}_{25}$ als Linearkombination von Basiselementen über $\mathbb{F}_5$. Finden Sie ein primitives Element β von $\mathbb{F}_{25}$ und bestimmen Sie für jedes $\alpha \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_{25})$ die kleinste nichtnegative ganze Zahl n mit $\alpha = \beta^n$.
11. Sei K ein Körper, dessen Einheitengruppe $\mathcal{E}(K)$ zyklisch ist. Zeigen Sie, dass K endlich ist.