

CM1-40. In diesem Beispiel sind Werte der Exponentialfunktion  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  zu bestimmen. Dabei sind die eingebaute Exponentialfunktion (und ähnliche Funktionen) oder gar unendliche Reihen nicht zu benutzen, sondern es ist rein mit rationalen Zahlen und Partialsummen der Reihe zu arbeiten. Weiters ist immer durch entsprechende Abschätzungen zu begründen, warum die jeweils berechneten Näherungen stimmen.

- (a) Bestimmen Sie  $e = \exp(1)$  auf 100 Dezimalstellen genau, d.h., bestimmen Sie eine rationale Zahl  $r$  mit  $|r - e| < 10^{-100}$ .
- (b) Bestimmen Sie  $e = \exp(1)$  für vorgegebenes  $n \in \mathbb{N}$  auf  $n$  Dezimalstellen genau.
- (c) Bestimmen Sie  $\exp(100)$  auf 50 Dezimalstellen genau.
- (d) Bestimmen Sie  $\exp(100)$  auf 50 Dezimalstellen genau, indem Sie  $\exp(100/2^n)$  über die Reihe berechnen und das Resultat mit  $2^n$  potenzieren. Experimentieren Sie mit verschiedenen  $n$  und geben Sie jeweils an, wie viele Reihenglieder Sie berechnen müssen.

CM1-41. Eine zweistufige Rakete für kleine Satelliten hat die Kenndaten:

	Leermasse	Treibstoffmasse	Verbrauch	Schubkraft $F$
1. Stufe	5000 kg	125000 kg	1000 kg/s	$2.45 \cdot 10^6 \text{N}$
2. Stufe	2000 kg	16000 kg	80 kg/s	$2.48 \cdot 10^5 \text{N}$

Die Rakete wird vertikal gestartet; ist der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man vereinfachend  $g = 9.81 \text{m/s}^2$  (unabhängig von der Höhe) für den Flug konstant, so gilt für die Beschleunigung der Rakete

$$\ddot{h}(t) = \dot{v}(t) = b(t) = \frac{F}{m(t)} - g.$$

- (a) Bestimme die Funktion  $m(t)$  (= Gesamtmasse zur Zeit  $t$ ).
- (b) Welche Geschwindigkeit  $v$  hat die Rakete 125 s bzw. 325 s nach dem Start?
- (c) Welche Höhe  $h$  wird nach 125 s bzw. 325 s erreicht?
- (d) Skizzieren Sie  $m(t)$ ,  $b(t)$ ,  $v(t)$  und  $h(t)$  für  $0 \leq t \leq 325$  s.

CM1-42. Bestimmen Sie in (a) Maple und (b) Mathematica das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{\tan x} dx$$

und überprüfen Sie das Ergebnis durch Differentiation.

CM1-43. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica, (c) Octave numerisch das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{27} + x + 2009}} dx.$$

1. Erklären Sie die Mathematica- bzw. Maple-Konstrukte `Module` bzw. `proc`.
2. Man zeige, wie Typenüberprüfungen in Mathematica und Maple funktionieren (`_` bzw. `::`).
3. Schreiben Sie ein Octave- oder Matlab-Programm, das für eine reguläre obere Dreiecksmatrix  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und ein  $b \in \mathbb{R}^n$  das eindeutige  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $Rx = b$  bestimmt.
4. Schreiben Sie ein Octave- oder Matlab-Programm, das eine gegebene reguläre quadratische Matrix auf Zeilenstufenform bringt.
5. Schreiben Sie ein Octave- oder Matlab-Programm, das für gegebenes reguläres  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und gegebenes  $b \in \mathbb{R}^{n \times n}$  das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  löst.

6. Schreiben Sie eine eigene Funktion zur Lösung eines linearen Gleichungssystems (gegeben eine Matrix  $A$  und ein Vektor  $b$ ).
- (a) Maple; im Fall von unendlich vielen Lösungen reicht die Ausgabe einer Lösung,
  - (b) Mathematica; im Fall von unendlich vielen Lösungen reicht die Ausgabe einer Lösung,
  - (c) Maple; im Fall von unendlich vielen Lösungen sind alle Lösungen (parametrisiert) auszugeben,
  - (d) Mathematica; im Fall von unendlich vielen Lösungen sind alle Lösungen (parametrisiert) auszugeben.

7. Gegeben seien  $k$  Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Gesucht ist eine linear unabhängige Teilfamilie, die denselben Raum wie  $v_1, \dots, v_k$  aufspannen. Schreiben Sie ein Maple oder Mathematica Programm. Testen Sie Ihre Programme an guten Beispielen. Der Befehl „NullSpace“ darf verwendet werden.
8. Gegeben seien  $k$  linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . Schreiben Sie ein Programm (Maple oder Mathematica), das diese zu einer Basis des  $\mathbb{R}^n$  erweitert. Testen Sie an guten Beispielen. Der Befehl „NullSpace“ darf verwendet werden.
9. Definieren Sie jeweils *eine* Ersetzungsregel `myrule` in Mathematica, sodass folgende Ausgabe erzeugt wird:

(a) **`f[x + 2] + Exp[f[y + 2]] - g[x + 2] + f[x + 3]/.myrule`**  
 $e^{f[\text{Plus2}[y]]} + f[3 + x] + f[\text{Plus2}[x]] - g[2 + x]$

(b) **`f[x + 2] + Exp[f[y + 2]] - g[x + 2] + f[x + 3]/.myrule`**  
 $e^{f[\text{Plus2}[y]]} + f[3 + x] + f[\text{Plus2}[x]] - g[\text{Plus2}[x]]$

(c) **`Log[3(x + 1)] + Log[(x - 1)(x + 1)]/.myrule`**  
 $\text{Log}[3] + \text{Log}[-1 + x] + 2\text{Log}[1 + x]$

(d) **`Log[3(x + 1)] + Log[(x - 1)/(x + 1)]/.myrule`**  
 $\text{Log}[3] + \text{Log}[-1 + x] + \text{Log}\left[\frac{1}{1+x}\right] + \text{Log}[1 + x]$

10. Erstellen Sie eine Bildschirm-Präsentation mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Beamer, in der Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 - 2x + 2}$$

durchführen. (Es ist die Präsentation auch vorzuführen.)

11. Erstellen Sie eine Bildschirm-Präsentation mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Beamer, in der Sie folgende Aufgabe behandeln (Diskrete Math., SS 2009, Bsp. 11):

Zeigen Sie: Sei  $G$  eine Gruppe,  $a \in G$  und  $|a| = n$ . Dann gilt für alle  $m \in \mathbb{Z}$

$$|a^m| = \frac{n}{\text{ggT}(n, m)}.$$

Die Präsentation ist auch vorzuführen.

12. Man programmiere eine Maple-Funktion, die zwei Permutationen der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  multipliziert. Es soll also etwa

$$\text{permmult}([5, 3, 4, 2, 1], [3, 2, 4, 1, 5]) = [4, 3, 2, 5, 1]$$

gelten. Die Darstellung einer Permutation  $\pi$  in der Form  $[a_1, a_2, \dots]$  soll dabei bedeuten, dass  $\pi(1) = a_1, \pi(2) = a_2, \text{etc.}$

13. Man programmiere eine Maple-Funktion, die die inverse Permutation zu einer Permutation bestimmt. Dabei seien die Permutationen wie in Beispiel 12 dargestellt.
14. Implementieren Sie die  $QR$ -Zerlegung einer  $m \times n$ -Matrix via Householder-Reflektoren in Matlab/Octave.

- (a) Der Algorithmus darf eine Laufzeit von  $O(\max(m, n)^4)$  haben.
- (b) Der Algorithmus muss eine Laufzeit von  $O(\max(m, n)^3)$  haben. Richtwert: Die  $QR$ -Zerlegung einer zufällige  $1000 \times 1000$ -Matrix kann mit einem selbstgeschriebenen Programm unter octave 3.0.1 auf einem Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> 2 Duo E8400 mit 3 GHz in 35 Sekunden bestimmt werden.

15. Berechnen Sie in Maple oder Mathematica die  $LR$ -Zerlegung folgender Matrizen, so sie existiert.

(a) 
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 9 & 0 \\ 23 & 10 & 20 & 02 \end{pmatrix}$$

Dabei dürfen keine einschlägigen eingebauten oder in Zusatzpaketen enthaltenen Befehle verwendet werden, sondern es ist Maple bzw. Mathematica als Taschenrechner, der mit Matrizen umgehen kann, zu verwenden. Führen Sie auch die Probe durch.

16. Implementieren Sie die Jacobi-Iteration zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme in Matlab/Octave und testen Sie sie anhand der Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 100 \\ 1 \leq j \leq 100}}$$

mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 5, & \text{wenn } i = j, \\ 1, & \text{wenn } i \equiv j \pmod{25}, \text{ aber } i \neq j, \end{cases}$$

und dem Startvektor  $(1, \dots, 1)^t$ .

17. Wie Beispiel 16, aber mit dem Gauß-Seidel-Verfahren.
18. Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$  sei durch eine Liste von Kanten gegeben, wobei jede Kante wieder eine zweielementige Liste (mit den Endknoten) ist. Schreiben Sie ein Maple- oder Mathematica-Programm (ohne Verwendung von einschlägigen Zusatzpackages), das daraus die Folge  $\deg i, i = 1, \dots, n$ , bestimmt. Also zum Beispiel

`GradFolge[{{1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3},{2,5}}]={4,3,2,1,2}` .

19. Schreiben Sie ein kurzes Maple- oder Mathematica-Programm, das für eine gegebene (monoton fallende) Folge nicht-negativer Zahlen feststellt, ob es einen Graph mit dieser Gradfolge gibt. Testen Sie Ihr Programm an den beiden Folgen  $(6, 6, 6, 6, 4, 3, 3, 0)$  und  $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2)$ .
20. Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$  sei wie in Beispiel 18 gegeben. Schreiben Sie ein Programm, das feststellt, ob der Graph zusammenhängend ist.

21. Wie Beispiel 16, aber mit dem SOR-Verfahren mit verschiedenen Werten  $w$ .
22. Man programmiere eine Maple-Funktion, die aus der Listendarstellung einer Permutation (wie in Beispiel 12) ihre Zyklendarstellung bestimmt (als Liste von Listen), also z.B.

$$\text{zyklendarstellung}([3,5,4,1,2,6])=[[1,3,4],[2,5],[6]].$$

23. Man programmiere eine Maple-Funktion, die aus der Zyklendarstellung einer Permutation wieder die Listendarstellung bestimmt, also z.B.

$$\text{listendarstellung}([[1,3,4],[2,5],[6]])=[3,5,4,1,2,6].$$

24. Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$  sei wie in Beispiel 18 gegeben. Schreiben Sie ein Programm, das feststellt, ob der Graph ein Baum ist.

25. Zeichnen Sie in Asymptote ein Dreieck mit allen drei Höhen, den Höhenfußpunkten sowie dem Höhenschnittpunkt. Dabei sollen sich (bis auf die Positionierung der Beschriftungen) die Koordinaten des Dreiecks leicht ändern lassen (d.h. berechnen Sie alles aus diesen Koordinaten heraus).
26. Zeichnen Sie in Asymptote ein Dreieck mit allen Winkelsymmetralen, dem Inkreismittelpunkt und dem Inkreis. Alle Berechnungen sind in Asymptote durchzuführen.
27. Wir betrachten die rekursiv definierten Polynome  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,

$$(n + 1)P_{n+1}(x) := (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

(Legendre-Polynome 1. Art).

Zeigen Sie durch Rechnung in Maple/Mathematica, dass

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

28. Man implementiere eine Funktion `diff[expr_, variable_]` in Mathematica, die rationale Funktionen korrekt differenziert: `expr` darf also eine beliebige Kombination aus den vier Grundrechnungsarten, Potenzbildung, der Differentiationsvariablen und Konstanten sein. Man überprüfe die Funktion anhand von

$$\frac{d}{dx} \left( (x^2 + 3x - b)^4 - \frac{x + a}{x^9 - 17} \right) = 4(x^2 + 3x - b)^3(2x + 3) - \frac{x^9 - 17 - 9x^8(x + a)}{(x^9 - 17)^2}.$$

Hinweis: `FreeQ`.

29. Definieren Sie in Mathematica einen Datentyp `mod[x,m]` für Restklassen modulo  $m$ .
- Implementieren Sie Addition, Multiplikation und Vergleich zweier Restklassen modulo demselben Modul.
  - Implementieren Sie Inversion (falls  $m = p$  eine Primzahl ist, die  $x$  nicht teilt). Hinweis:  $x^{p-2} \cdot x \equiv ?? \pmod{p}$ .
  - Implementieren Sie Potenzen von Restklassen (falls  $m = p$ , auch für negative Exponenten)

30. Fortsetzung von Beispiel 28: Es sollen nun auch Ausdrücke, die  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\log_b$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\cot$  sowie allgemeine Potenzfunktionen  $f(x)^{g(x)}$  (und beliebige Verschachtelungen) beinhalten, korrekt differenziert werden. Weiters ist dafür Sorge zu tragen, dass ein(e) Benutzer(in) das System leicht durch Deklarationen im Stil von `di[Sinh]=Cosh[#]&` erweiterbar ist. Für unbekannte auftretende Funktionen  $f$  soll zumindest  $f'$  ausgegeben werden. *Hinweis:* `HoldForm`.

31. (a) Erklären Sie folgenden Code in allen Details (z.B. auch: warum kommt „ $\wedge$ “ vor?) und schreiben Sie dazu einige Beispiele, wo das eingesetzt wird.

```
MyComplex[a_, b_] + MyComplex[c_, d_] ^= MyComplex[a + c, b + d]
MyComplex[a_, b_] * MyComplex[c_, d_] ^= MyComplex[a c - b d, b c + a d]
Norm[MyComplex[a_, b_]] ^= a^2 + b^2
Conjugate[MyComplex[a_, b_]] ^= MyComplex[a, -b]
MyComplex /: Power[u : MyComplex[a_, b_], -1] := Conjugate[u]/Norm[u]
Format[MyComplex[a_, b_]] := a + b i
```

(b) Ergänzen Sie die obigen Definitionen, sodass auch folgende Eingaben die erwartete Ausgabe liefern:

```
(MyComplex[1, 2]^-1) MyComplex[1, 2]
MyComplex[1, 2]^2
1+MyComplex[0,1]
```

32. Die Hamiltonschen Quaternionen von der Form

$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

bilden einen nichtkommutativen Ring (sogar einen Schiefkörper), wobei die Addition komponentenweise erfolgt und die Multiplikation dadurch erklärt sei, dass

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

sowie

$$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$$

gilt. Man implementiere in Mathematica einen Datentyp `MyQuaternion` (ohne Verwendung des bereits existierenden `Quaternion`-Pakets), der die Elemente in der Form

$$a + bI + cJ + dK$$

ausgeben soll und weiters Gesetze für Addition und Multiplikation enthält. Hinweis: anstelle von `*` ist das nichtkommutative `**` für die Multiplikation zu verwenden!

33. Benutzen Sie Beispiel 32, um nachzurechnen, dass die Quaternionen tatsächlich einen Schiefkörper bilden.

34. Zeigen Sie folgende Identitäten für Fibonacci-Zahlen  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  durch Rechnung in Maple/Mathematica:

- (a)  $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$  für die beiden Nullstellen  $\alpha$  und  $\beta$  von  $Z^2 - Z - 1 = 0$ .
- (b)  $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ .
- (c)  $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ .

Hier dürfen nur `Simplify` etc. benutzt werden, nicht aber `rsolve`, `solve` odgl.

35. Implementieren Sie das Rechnen mit Permutationen der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  in Mathematica.

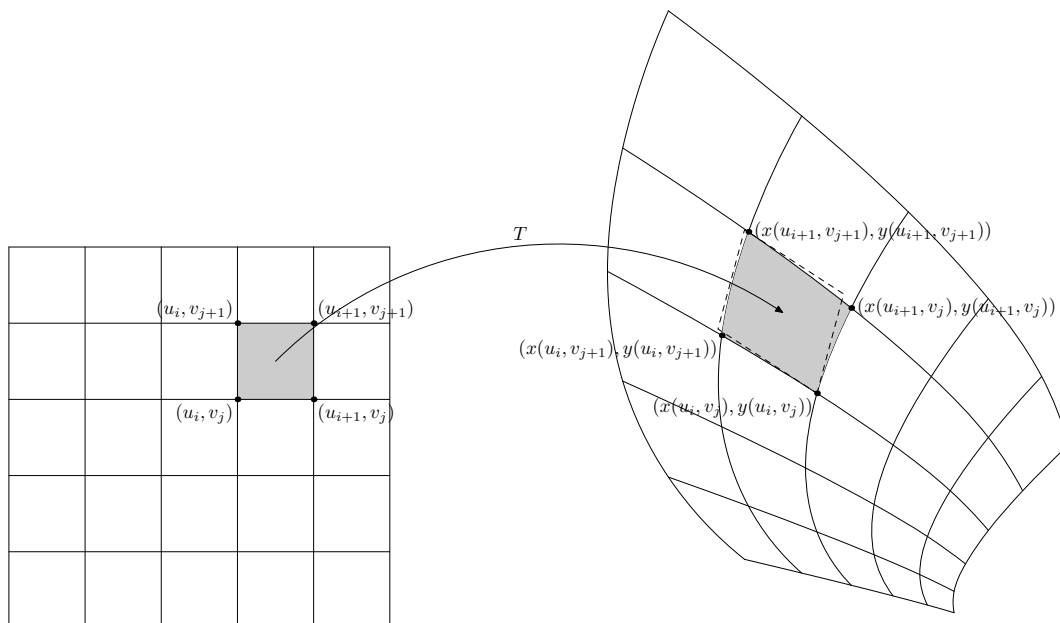
- Eingabe als `Permutation[a[1], a[2], ..., a[r]]` (entspricht der Permutation  $i \mapsto a[i]$ , wobei zu überprüfen ist, ob es wirklich um eine Permutation handelt).

- Eingabe als `Cycle[a[1],a[2],...,a[r]]` (inklusive Gültigkeitsüberprüfung)
- Ausgabe in Zyklendarstellung
- Multiplikation zweier Permutationen mit `**`

Also zum Beispiel:

- `Cycle[1,2]**Cycle[1,3]**Cycle[4,5]`  $\mapsto (132)(45)$
- `Cycle[1,2]**Permutation[3,2,1]`  $\mapsto (132)$
- `Permutation[1,2,5]`  $\mapsto$  Fehler: Element 5 in Permutation von 3 Zahlen unzulässig.
- `Cycle[1,2,a]`  $\mapsto$  unausgewertet oder Fehler: Nur positive ganze Zahlen in Cycle erlaubt.

36. Zeichnen Sie folgende Abbildung mit Asymptote:



37. Ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, \dots, n\}$  sei wie in Beispiel 18 gegeben. Schreiben Sie ein Programm, das einen Eulerkreis in  $G$  findet oder ausgibt, dass es keinen solchen gibt.

38. Schreiben Sie möglichst viele verschiedene Mathematica-Programme zur Berechnung von  $F_{1000}$ , wobei  $F_n$  die  $n$ -te Fibonacci-Zahl ( $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  und  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  für  $n \geq 1$ ) ist. Experimentieren Sie auch mit größeren  $n$ , um die Laufzeiten Ihrer Programme zu vergleichen.
39. Implementiere das Gaußsche Eliminationsverfahren in Mathematica zur Bestimmung einer Basis des Kernes einer Matrix mit Elementen aus  $\mathbb{Z}_p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist.