30. Fortsetzung von Beispiel 28: Es sollen nun auch Ausdrücke, die exp, ln, $\log_b$, sin, cos, tan, cot sowie allgemeine Potenzfunktionen $f(x)^{g(x)}$ (und beliebige Verschachtelungen) beinhalten, korrekt differenziert werden. Weiters ist dafür Sorge zu tragen, dass ein(e) Benutzer(in) das System leicht durch Deklarationen im Stil von `di[Sinh]=Cosh[#]&` erweiterbar ist. Für unbekannte auftretende Funktionen f soll zumindest f' ausgegeben werden. *Hinweis:* `HoldForm`.

31. (a) Erklären Sie folgenden Code in allen Details (z.B. auch: warum kommt „^" vor?) und schreiben Sie dazu einige Beispiele, wo das eingesetzt wird.

```
MyComplex[a_, b_] + MyComplex[c_, d_] ^:= MyComplex[a + c, b + d]
MyComplex[a_, b_]*MyComplex[c_, d_] ^:= MyComplex[a c - b d, b c + a d]
Norm[MyComplex[a_, b_]] ^:= a^2 + b^2
Conjugate[MyComplex[a_, b_]] ^:= MyComplex[a, -b]
MyComplex /: Power[u : MyComplex[a_, b_], -1] := Conjugate[u]/Norm[u]
Format[MyComplex[a_, b_]] := a + b i
```

    (b) Ergänzen Sie die obigen Definitionen, sodass auch folgende Eingaben die erwartete Ausgabe liefern:

```
(MyComplex[1, 2]^-1) MyComplex[1, 2]
MyComplex[1, 2]^2
1+MyComplex[0,1]
```

32. Die Hamiltonschen Quaternionen von der Form

$$a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \ (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

bilden einen nichtkommutativen Ring (sogar einen Schiefkörper), wobei die Addition komponentenweise erfolgt und die Multiplikation dadurch erklärt sei, dass

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

sowie

$$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$$

gilt. Man implementiere in Mathematica einen Datentyp `MyQuaternion` (ohne Verwendung des bereits existierenden `Quaternion`-Pakets), der die Elemente in der Form

$$a + bI + cJ + dK$$

ausgeben soll und weiters Gesetze für Addition und Multiplikation enthält. Hinweis: anstelle von `*` ist das nichtkommutative `**` für die Multiplikation zu verwenden!

33. Benutzen Sie Beispiel 32, um nachzurechnen, dass die Quaternionen tatsächlich einen Schiefkörper bilden.

34. Zeigen Sie folgende Identitäten für Fibonacci-Zahlen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ durch Rechnung in Maple/Mathematica:

    (a) $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ für die beiden Nullstellen α und β von $Z^2 - Z - 1 = 0$.

    (b) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

    (c) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$.

    Hier dürfen nur Simplify etc. benutzt werden, nicht aber rsolve, solve odgl.

35. Implementieren Sie das Rechnen mit Permutationen der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ in Mathematica.

    - Eingabe als `Permutation[a[1],a[2],...,a[r]]` (entspricht der Permutation $i \mapsto a[i]$, wobei zu überprüfen ist, ob es wirklich um eine Permutation handelt).