1. Sei
$$z = \frac{(1+2i)\big((4+3i)^2 + 1 - 22i\big)}{(2-i)^2 - 2 + 5i}.$$
Bestimmen Sie in (a) Maple und (b) Mathematica den Realteil, Imaginärteil, Absolutbetrag von z sowie z^2.
Hinweis. Beachten Sie die Funktionen `Re` und `Im`.

2. Werten Sie die Funktion
$$f(x) := \sqrt{\frac{3+x}{2-x}} - e^x \ln x \sin(2\pi x)$$
an den Stellen $x = 1$, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $\ldots$, $1/4096$ in (a) Maple, (b) Mathematica aus. Die Werte für x sind nicht händisch einzugeben.

3. Finden Sie heraus, wie man in Maple und Mathematica logische Ausdrücke eingibt und
   (a) sie in Maple in disjunktive und konjunktive Normalform bringt,
   (b) sie in Mathematica in disjunktive Normalform bringt.

   Bestimmen Sie damit die disjunktive Normalform von $(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow p)$.

4. Kommissar X weiß über die 4 Tatverdächtigen P, Q, R und S:
   (a) P ist genau dann schuldig, wenn Q unschuldig ist.
   (b) R ist genau dann unschuldig, wenn S schuldig ist.
   (c) Falls S Täter ist, dann auch P und umgekehrt.
   (d) Falls S schuldig ist, dann ist Q beteiligt.

   Benutzen Sie Mathematica, um den Täter zu finden.

5. Benutzen Sie Maple, um herauszufinden, ob die logischen Ausdrücke $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge r$ und $p \wedge r \leftrightarrow \neg(q \wedge r)$ äquivalent sind.

6. (a) Verwenden Sie die Mathematica-Befehle `Subsets` und `Outer`, um $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$ für $A = \{x, y\}$ und $B = \{y, z\}$ explizit anzugeben. Dabei sollen Sie nur die Mengen A und B eingeben und alles andere von Mathematica berechnen lassen.
   (b) Geben Sie alle Elemente der Menge
   $$\{(a, b) \in \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B) \mid a \supseteq b\}$$
   (für obige Mengen A und B) explizit an.
   Hinweis. `Select`, `Complement`

   ($\mathfrak{P}(M)$ steht für die Potenzmenge einer Menge M).

7. Man berechne die Summe
$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k).$$
(Maple oder Mathematica)

8. Bestimmen Sie
$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)\binom{n}{k}.$$

9. Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Beziehung
$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-15k+16)=n(n-3)^2$$
gilt, ohne die Summe auf der linken Seite explizit (z.B. durch `sum` bzw. `Sum`) auszurechnen.

10. Berechnen Sie das Produkt
$$\prod_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n-i}$$
in Maple.

11. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica alle $x \in \mathbb{R}$ mit
$$0 \le \frac{x^2+2}{x+2} \le 3.$$
Hinweis. `Reduce`.

12. Sei für $n \ge 1$
$$a_n = \frac{n^2}{n^2+2n}.$$
Bestimmen Sie für $\varepsilon \in \{1, 10^{-3}, 10^{-6}\}$ die jeweils kleinste positive ganze Zahl n_ε, sodass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt. (Maple oder Mathematica).

13. Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right).$$

14. Finden Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass
$$\begin{aligned} x+y+z &= 4,\\ x^2+y^2+z^2 &= 11,\\ x^3+y^3+z^3 &= 2008. \end{aligned}$$
Machen Sie jeweils die Probe. Bestimmen Sie weiters für jede Lösung (x, y, z) den Wert von $x^4+y^4+z^4$.

15. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica die kleinsten nichtnegativen Reste der Zahlen
$$123 \cdot 456 + 231^3 \text{ und } 3^{3^{3^3}}$$
bei Division durch 2008.

16. Bestimmen Sie für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 23, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 107 \end{aligned}$$

den Wert von $x^4 + y^4 + z^4$.

17. Bestimmen Sie in Maple alle Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, deren Mächtigkeit eine Primzahl ist (wobei Sie die erforderlichen Primzahlen nicht von Hand eingeben sollen).

18. Wir betrachten die durch

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{3}{4} + \sqrt{3 + a_n} \text{ für } n \geq 0$$

rekursiv gegebene Folge.

(a) Bestimmen Sie die ersten 20 Folgenglieder auf 50 Dezimalstellen genau.

(b) Bestimmen Sie alle Folgenglieder bis zum ersten Folgenglied, das von 13/4 einen Abstand kleiner oder gleich 10^{-12} hat.

19. Wir betrachten die durch

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 2a_n \text{ für } n \geq 0$$

rekursiv gegebene Folge.

(a) Bestimmen Sie die ersten 10 Folgenglieder.

(b) Bestimmen Sie a_{40}.

20. Sei W der von $v_1 = (3, 4, 5, 6, 7)^t$, $v_2 = (7, 5, 2, 3, 1)^t$, $v_3 = (10, 9, 7, 9, 8)^t$ aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{Q}^5$. Bestimmen Sie in Maple die Dimension von W. Gilt $(3, 6, 1, 1, 2)^t \in W$?

Hinweis. Rank

21. Setzen Sie die Angabe von Übungsaufgabe 26 der Grundbegriffe der Mathematik-Übung in LaTeX.

22. Setzen Sie die Angabe von Übungsaufgabe 27 der Grundbegriffe der Mathematik-Übung in LaTeX.

23. Untersuchen Sie die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{n}$$

auf Konvergenz und arbeiten Sie das in LaTeX aus. *Achten Sie (nicht nur hier) insbesondere auf die Vollständigkeit Ihrer Lösung und darauf, grammatikalisch und logisch einwandfreie Sätze zu schreiben.*

24. Beweisen Sie, dass die Gleichung $\tan x = x^7$ in jedem Intervall $(n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, wenigstens eine Nullstelle besitzt. Arbeiten Sie das in LaTeX aus. *Achten Sie (nicht nur hier) insbesondere auf die Vollständigkeit Ihrer Lösung und darauf, grammatikalisch und logisch einwandfreie Sätze zu schreiben.*

25. Bestimmen Sie die drei reellen Zahlen a, b und c im Polynom $P(x) = x^6 + ax^4 + bx^3 + c$ so, dass $x^2 + 1$ und x Teiler von $P(x)$ sind. Arbeiten Sie das in LaTeX aus. *Achten Sie (nicht nur hier) insbesondere auf die Vollständigkeit Ihrer Lösung und darauf, grammatikalisch und logisch einwandfreie Sätze zu schreiben.*

26. Bestimmen Sie in Maple oder Mathematica die Partialbruchzerlegung von
$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2+x-1}.$$

27. Bestimmen Sie in Maple oder Mathematica die Partialbruchzerlegung von
$$\frac{10x-4}{x^2-2}.$$

28. Seien

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A := L \cdot R$ sowie $A \cdot x$. Welche der vorkommenden Matrizen L, R, A sind invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inversen. Überprüfen Sie, ob die angegebenen Inversen korrekt sind. (a) Maple (b) Mathematica

29. Bringen Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 9 & 11 \\ 3 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform ((a) Maple, (b) Mathematica). Verwenden Sie dazu zunächst keine speziellen eingebauten Befehle, sondern simulieren Sie händische Rechnung. Kontrollieren Sie — soweit möglich — mit eingebauten Befehlen.

30. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 5x + y + 6z &= 1 \\ y + 5z &= 3 \\ 3x + y - 4z &= 2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

in Maple und Mathematica. Sie können dazu die eingebauten Funktionen verwenden.

31. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

((a) Maple, (b) Mathematica). Verwenden Sie dazu zunächst keine speziellen eingebauten Befehle, sondern simulieren Sie händische Rechnung. Verwenden Sie anschließend eingebaute Befehle und machen Sie abschließend auch die Probe.

32. Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & ky & - & (k+1)z & = & k-7 \\ (1-k)x & - & ky & + & (2k-1)z & = & 3k-1 \\ kx & + & 4y & - & 6z & = & -10 \end{array}$$

(i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen bzw. (iii) keine Lösung? Für die Fälle (i) und (ii) sind die Lösungen in Abhängigkeit von k anzugeben. Benutzen Sie *nicht* den Befehl `Solve`, um das gesamte System zu lösen.

33. Sei
$$z = \frac{(1+2i)\big((4+3i)^2+1-22i\big)}{(2-i)^2-2+5i}.$$
Bestimmen Sie in Matlab/Octave den Realteil, Imaginärteil, Absolutbetrag von z sowie z^2.

34. Werten Sie die Funktion
$$f(x) := \sqrt{\frac{3+x}{2-x}} - e^x \ln x \sin(2\pi x)$$
an den Stellen $x = 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \ldots, 1/4096$ in Matlab/Octave aus. Die Werte für x sind nicht händisch einzugeben.

35. Seien
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Berechnen Sie $A := L \cdot R$ sowie $A \cdot x$. Welche der vorkommenden Matrizen L, R, A sind invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inversen. Überprüfen Sie, ob die angegebenen Inversen korrekt sind. Matlab/Octave.

36. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
in Octave/Matlab. Verwenden Sie dazu zunächst keine speziellen eingebauten Befehle, sondern simulieren Sie händische Rechnung. Verwenden Sie anschließend eingebaute Befehle und machen Sie abschließend auch die Probe.

37. Berechnen Sie in Octave oder Matlab
$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$
für $x = 10^{-12}, 10^{-13}, \ldots$, ohne dass dabei Auslöschung auftritt. Vergleichen Sie mit direkter Auswertung und exakter Rechnung.
Hinweis. Unter „Auslöschung“ versteht man den Genauigkeitsverlust, der bei Subtraktion annähernd gleich großer Zahlen entsteht.

38. Gegeben sei die Funktion
$$f(x) = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$
Bestimmen Sie in Maple oder Mathematica
    (a) den Definitionsbereich und die Nullstellen,
    (b) die Extrema und die Wendepunkte,
    (c) die Asymptoten,
    (d) eine Skizze des Graphen der Funktion.

39. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(x) = e^x - 2 + x^3$ in $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt. Zeigen Sie ferner, dass in $[0,1]$ das Newtonsche Näherungsverfahren anwendbar ist und berechnen Sie damit näherungsweise die Nullstelle in ξ von f. Die Berechnung soll abgebrochen werden, sobald die Näherungswerte ξ_n der Abschätzung $|\xi_n - \xi_{n+1}| \leq 10^{-10}|\xi_n|$ genügen.

40. In diesem Beispiel sind Werte der Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zu bestimmen. Dabei sind die eingebaute Exponentialfunktion (und ähnliche Funktionen) oder gar unendliche Reihen nicht zu benutzen, sondern es ist rein mit rationalen Zahlen und Partialsummen der Reihe zu arbeiten. Weiters ist immer durch entsprechende Abschätzungen zu begründen, warum die jeweils berechneten Näherungen stimmen.
    (a) Bestimmen Sie $e = \exp(1)$ auf 100 Dezimalstellen genau, d.h., bestimmen Sie eine rationale Zahl r mit $|r - e| < 10^{-100}$.
    (b) Bestimmen Sie $e = \exp(1)$ für vorgegebenes $n \in \mathbb{N}$ auf n Dezimalstellen genau.
    (c) Bestimmen Sie $\exp(100)$ auf 50 Dezimalstellen genau.
    (d) Bestimmen Sie $\exp(100)$ auf 50 Dezimalstellen genau, indem Sie $\exp(100/2^n)$ über die Reihe berechnen und das Resultat mit 2^n potenzieren. Experimentieren Sie mit verschiedenen n und geben Sie jeweils an, wie viele Reihenglieder Sie berechnen müssen.

41. Eine zweistufige Rakete für kleine Satelliten hat die Kenndaten:

	Leermasse	Treibstoffmasse	Verbrauch	Schubkraft F
1. Stufe	5000 kg	125000 kg	1000 kg/s	$2.45 \cdot 10^6$N
2. Stufe	2000 kg	16000 kg	80 kg/s	$2.48 \cdot 10^5$N

Die Rakete wird vertikal gestartet; ist der Treibstoff der 1. Stufe verbraucht, so wird deren Hülle abgestoßen. Setzt man vereinfachend $g = 9.81\text{m/s}^2$ (unabhängig von der Höhe) für den Flug konstant, so gilt für die Beschleunigung der Rakete
$$\ddot{h}(t) = \dot{v}(t) = b(t) = \frac{F}{m(t)} - g.$$
    (a) Bestimme die Funktion $m(t)$ (= Gesamtmasse zur Zeit t).
    (b) Welche Geschwindigkeit v hat die Rakete 125 s bzw. 325 s nach dem Start?
    (c) Welche Höhe h wird nach 125 s bzw. 325 s erreicht?
    (d) Skizzieren Sie $m(t)$, $b(t)$, $v(t)$ und $h(t)$ für $0 \leq t \leq 325$ s.

42. Bestimmen Sie in (a) Maple und (b) Mathematica das unbestimmte Integral
$$\int \sqrt{\tan x}\, dx$$
und überprüfen Sie das Ergebnis durch Differentiation.

43. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica, (c) Octave numerisch das Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^{27} + x + 2009}}\, dx.$$