

7. Man berechne die Summe

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k).$$

(Maple oder Mathematica)

8. Bestimmen Sie

$$\sum_{k=0}^n (1+k) \binom{n}{k}.$$

9. Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n (3k^2 - 15k + 16) = n(n-3)^2$$

gilt, ohne die Summe auf der linken Seite explizit (z.B. durch `sum` bzw. `Sum`) auszurechnen.

10. Berechnen Sie das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-i}$$

in Maple.

11. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$0 \leq \frac{x^2 + 2}{x + 2} \leq 3.$$

Hinweis. Reduce.

12. Sei für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + 2n}.$$

Bestimmen Sie für $\varepsilon \in \{1, 10^{-3}, 10^{-6}\}$ die jeweils kleinste positive ganze Zahl n_ε , sodass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$ gilt. (Maple oder Mathematica).

13. Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+2)}{n+1} - \frac{n^3}{n^2+1} \right).$$

14. Finden Sie alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 11, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 2008. \end{aligned}$$

Machen Sie jeweils die Probe. Bestimmen Sie weiters für jede Lösung (x, y, z) den Wert von $x^4 + y^4 + z^4$.

15. Bestimmen Sie in (a) Maple, (b) Mathematica die kleinsten nichtnegativen Reste der Zahlen

$$123 \cdot 456 + 231^3 \text{ und } 3^{3^{3^3}}$$

bei Division durch 2008.