26. Bestimmen Sie die kleinste positive ganze Zahl x mit
$$x \equiv 28 \pmod{49},$$
$$x \equiv 15 \pmod{41}.$$

27. Zeigen Sie: Für alle zu 561 teilerfremden Zahlen a gilt
$$a^{560} \equiv 1 \pmod{561}.$$

28. Wir definieren $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch
$$\begin{aligned} \lambda(p^\alpha) &= \varphi(p^\alpha) = (p-1)p^{\alpha-1}, && p \text{ ungerade Primzahl}, \alpha \geq 1,\\ \lambda(2^\alpha) &= \varphi(2^\alpha)/2 = 2^{\alpha-2}, && \alpha \geq 3,\\ \lambda(4) &= 2,\\ \lambda(2) &= 1, \end{aligned}$$
und für verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und natürliche Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$
$$\lambda(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}) = \mathrm{kgV}(\lambda(p_1^{\alpha_1}), \ldots, \lambda(p_r^{\alpha_r})).$$
Zeigen Sie unter Verwendung der Zerlegung von $\mathcal{E}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ in ein Produkt zyklischer Gruppen, dass für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$
$$a^{\lambda(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$
gilt. Zeigen Sie weiters, dass diese Eigenschaften für keinen kleineren Exponenten k an der Stelle von $\lambda(m)$ gilt.

29. Es sei K ein Körper der Charakteristik p, p prim. Dann gilt für $a, b \in K$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$
$$(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}.$$

30. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $f = x^8 + 2x^5 + x^3 + x^2 + 1$ und $g = 2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2$ über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

31. $f = x^4 + 1$ ist prim in $\mathbb{Z}[x]$.

32. $f = x^2 + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[x]$ (wobei wie üblich $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

33. Eine über $\mathbb{Q}$ algebraische Zahl α heißt *ganzalgebraisch*, wenn es ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(\alpha) = 0$ gibt. Zeigen Sie, dass dann das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Z}[X]$ liegt.

34. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper K des Polynoms $X^3 - 2X^2 - 5X - 1$ über $\mathbb{Q}$. Geben Sie den Grad $[K : \mathbb{Q}]$ an.

35. Man berechne das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

36. Sei F ein Körper und $G \leq \mathrm{Aut}(F)$, dann bilden die Elemente von $\mathrm{Fix}_G(F)$ tatsächlich einen Körper. Dabei ist $\mathrm{Aut}(F) := \{\psi : F \to F \text{ Automorphismus}\}$, $\mathrm{Fix}_G(F) := \{a \in F : \psi(a) = a \text{ für alle } \psi \in G\}$.