18. Sei R ein ZPE-Ring und $\mathcal{P}$ ein Repräsentantensystem der Primelemente von R bezüglich Assoziiertheit. Für $a \in R$ und $p \in \mathcal{P}$ setze
$$v_p(a) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \mid a\},$$
insbesondere $v_p(0) = \infty$ für alle $p \in \mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass für a, $b \in R$ gilt:
    (a) Falls $a \neq 0$, so gilt
    $$a = u_a \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid a}} p^{v_p(a)},$$
    wobei $u_a \in \mathcal{E}(R)$.
    (b) $a \mid b \iff \forall p \in \mathcal{P} : v_p(a) \leq v_p(b)$,
    (c) $\forall p \in \mathcal{P} : v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$,
    (d) $a \sim b \iff \forall p \in \mathcal{P} : v_p(a) = v_p(b)$,
    (e) $\forall p \in \mathcal{P} : v_p(\mathrm{ggT}(a, b)) = \min(v_p(a), v_p(b))$,
    (f) $\forall p \in \mathcal{P} : v_p(\mathrm{kgV}(a, b)) = \max(v_p(a), v_p(b))$,
    (g) $\forall p \in \mathcal{P} : v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$,
    (h) $\forall p \in \mathcal{P} : v_p(a) \neq v_p(b) \to v_p(a + b) = \min(v_p(a), v_p(b))$,
    (i) $(R, \cdot) \simeq \mathcal{E}(R) \times \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{N}_0$ (Isomorphismus von Monoiden und direktes Produkt bzw. Summe von Monoiden sind analog wie Isomorphismen von Gruppen und direktes Produkt bzw. Summe definiert, das Wort „Gruppe“ ist jeweils durch „Monoid“ zu ersetzen.)
    (j) Für $p \in \mathcal{P}$ definiere den p-adischen Absolutbetrag durch $|x|_p := p^{-v_p(x)}$. Zeigen Sie, dass dann $(R, \| \cdot |)$ ein metrischer Raum ist.

19. Sei R ein ZPE-Ring und $a, b, d \in R \setminus \{0\}$. a und b seien teilerfremd. Dann gilt
    (a) $a \mid bd \Rightarrow a \mid d$
    (b) $a \mid d \wedge b \mid d \Rightarrow ab \mid d$
    (c) $a \mid b^2 \Rightarrow a \in \mathcal{E}(R)$

20. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, x eine Unbestimmte über R und $a \in R$. Für $f \in R[x]$ mit $\deg f \geq 1$ sei $f_a := f(x + a) \in R[x]$.

    Dann ist f genau dann irreduzibel, wenn f_a irreduzibel ist.

21. Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ mit $2 \leq \deg f \leq 3$. Dann ist f genau dann irreduzibel, wenn für alle $\alpha \in K$ $f(\alpha) \neq 0$.

    Gilt diese Aussage auch, wenn $\deg f = 4$?

22. Sei R ein faktorieller Ring, $f \in R[X]$ mit $f = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$, $a_d \neq 0$, und Q der Quotientenkörper von R.
    (a) Sei $r/s \in Q$ eine Nullstelle von f mit $\mathrm{ggT}(r, s) = 1$. Zeigen Sie, dass $r \mid a_0$ und $s \mid a_d$.
    (b) Sei f normiert (d.h., $a_d = 1$) und $\alpha \in Q$ eine Nullstelle von f in Q. Zeigen Sie, dass dann sogar $\alpha \in R$ gilt.
    (c) Sei $g = \sum_{j=0}^{d} a_j a_d^{d-1-j} X^j$ und $\alpha \in Q$. Dann ist $g \in R[X]$ normiert und α genau dann eine Nullstelle von f, wenn $a_d \alpha$ eine Nullstelle von g ist.
    (d) Sei α eine Nullstelle von f. Dann gibt es ein $b \in R$ mit $b \mid a_d^{d-1} a_0$ und $\alpha = b/a_d$.