

11. Geben Sie alle Einheiten, Nullteiler, irreduziblen Elemente und Primelemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ an. Was fällt auf?
12. Sei $D \in \mathbb{Z}$, D kein Quadrat. Betrachte die Abbildung („Norm“)

$$N : \mathbb{Q}[\sqrt{D}] \rightarrow \mathbb{Q} : a + b\sqrt{D} \mapsto a^2 - Db^2.$$

- (a) Zeigen Sie, dass N mit der Multiplikation verträglich (d.h. ein Monoidhomomorphismus) ist, d.h.,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}] : N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha)N(\beta),$$

der $N(\mathbb{Z}[\sqrt{D}]) \subseteq \mathbb{Z}$ erfüllt.

Wie verhält sich N zu einer bekannten Funktion (welcher?) von \mathbb{C} nach \mathbb{R} , falls $D < 0$?

- (b) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Zeigen Sie, dass $N(\alpha) \mid N(\beta)$, falls $\alpha \mid \beta$.
- (c) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Zeigen Sie, dass α genau dann eine Einheit ist, wenn $N(\alpha) \in \{\pm 1\}$.
13. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. Zeigen Sie:
- (a) 2, 3, $4 + \sqrt{10}$ und $4 - \sqrt{10}$ sind irreduzibel.
- (b) 2, 3, $4 + \sqrt{10}$ und $4 - \sqrt{10}$ sind nicht prim.
- (c) R ist kein faktorieller Ring; zeigen Sie insbesondere, dass 6 zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen in irreduzible Elemente besitzt.
14. Sei R ein Ring, $a \in R$, und A, B, C Teilmengen von R . Dann gilt

- (a) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (b) $A(BC) = (AB)C$
- (c) $A \leq R$ und $B \trianglelefteq R$, dann gilt $A + B \leq R$
- (d) wenn $A \trianglelefteq R$ und $B \trianglelefteq R$, dann auch $A + B \trianglelefteq R$ und $AB \trianglelefteq R$
- (e) wenn $A \trianglelefteq R$ und R ein Einselement hat, dann gilt $RA = AR = A$
- (f) B bzgl. + abgeschlossen $\implies aB = \{a \cdot b \mid b \in B\}$ und $Ba = \{b \cdot a \mid b \in B\}$ sind bzgl. + abgeschlossen.
- (g) $A \leq R$ und $B \trianglelefteq R$, dann gilt $A \cap B \trianglelefteq A$.

Hier werden die üblichen Definitionen für Komplexprodukte

$$M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\},$$

$$M \cdot N = \{m_1 n_1 + \dots + m_r n_r \mid r \in \mathbb{N}_0, m_j \in M, n_j \in N\}$$

verwendet.

15. Seien R ein kommutativer Ring und I, J Ideale von R . Dann gilt $IJ \subseteq I \cap J$.
16. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $M \triangleleft R$. M ist genau dann maximal, wenn es für alle $r \in R \setminus M$ ein $s \in R$ gibt, sodass $1 - rs \in M$.
17. Sei K ein Körper, dann hat $M_n(K)$, der Ring der $n \times n$ Matrizen über K , keine Ideale außer $\{0\}$ und $M_n(K)$.
- (Hinweis: Multiplikation von $A \in M_n(K)$ (nicht die Null-Matrix) mit E_{ij} von links und E_{kl} von rechts, wobei E_{ij} die Matrix mit der Eintragung 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst bezeichnet).