9. Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und R_i seien Ringe für alle $i \in I$. Sei $(\prod_{i \in I} R_i, +)$ das direkte Produkt der Gruppen $(R_i, +)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\prod_{i \in I} R_i$ bezüglich der Multiplikation $(r_i)_{i \in I} \cdot (s_i)_{i \in I} = (r_i \cdot s_i)_{i \in I}$ ein Ring ist.

   (b) Dieser Ring ist genau dann ein Ring mit Eins bzw. kommutativ, wenn für alle $i \in I$ die Ringe R_i Ringe mit Eins bzw. kommutativ sind.

   (c) Die kanonischen Projektionen $\pi_j : \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow R_j$ mit $\pi_j((r_i)_{i \in I}) = r_j$ sind Epimorphismen.
   Die kanonischen Einbettungen $\epsilon_j : R_j \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$ mit

   $$\epsilon_j(r) = (r_i)_{i \in I} \begin{cases} r_i = 0 & i \neq j \\ r_i = r & i = j \end{cases}$$

   sind Monomorphismen.

   (d) (*Universelle Eigenschaft des direkten Produkts von Ringen*)
   Sei $\{R_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Ringen und S ein Ring.
   Weiters sei $\{\phi_i : S \to R_i\}$ eine Familie von Ringhomomorphismen.
   Zeigen Sie, dass dann genau ein Ringhomomorphismus $\varphi : S \to \prod_{i \in I} R_i$ existiert, sodass für alle $i \in I$ gilt: $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.

10. Sei R ein kommutativer Ring und $\emptyset \neq S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge.

    (a) Die auf $R \times S$ durch

    $$(r,\, s) \sim (r',\, s') \iff \exists t \in S \;\; t(rs' - r's) = 0$$

    definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.

    (b) Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $(r,\, s)$ bzgl. $\sim$ mit $\frac{r}{s}$ und mit $S^{-1}R$ die Menge $R \times S/_{\sim}$ der Äquivalenzklassen in $R \times S$ bzgl. $\sim$. Zeigen Sie:
    Für beliebige $s,\, t \in S$ und $r \in R$ gilt

    $$\frac{r}{s} = \frac{rt}{st} \qquad \frac{s}{s} = \frac{t}{t} \qquad \frac{0}{s} = \frac{0}{t}$$

    (c) Wenn $0 \in S$, dann ist $S^{-1}R = \{\frac{0}{s} \mid s \in S\}$, also $|S^{-1}R| = 1$.

    (d) Durch $(a,b) + (c,d) := (ad + bc, bd)$ und $(a,b) \cdot (c,d) := (ac, bd)$ sind auf $S^{-1}R$ zwei Operationen definiert. Damit wird $(S^{-1}R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1.

    Sei ab jetzt R ein Integritätsbereich.

    (e) $Q(R) := (R \setminus \{0\})^{-1}R$ ist mit diesen Operationen ein Körper.

    (f) $\iota : R \to Q(R); a \mapsto (a, 1)$ ist ein Monomorphismus.

    (g) $Q(R)$ hat die universelle Eigenschaft von Quotientenkörpern. (Für jeden Körper K und jeden Monomorphismus $\varphi : R \to K$ gibt es einen Monomorphismus $\Phi : Q(R) \to K$ mit $\Phi \circ \iota = \varphi$.)