Konvention. In Aufgabenstellungen getätigte Aussagen sind jeweils zu beweisen, auch wenn kein explizites „Zeigen Sie, dass ...“ dabeisteht.

1. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $a_1, \dots a_n$, $b_1, \dots b_m \in R$, dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} a_i \cdot b_j.$$

2. Sei R ein Ring; $a \neq 0$ heiße Links-Nullteiler, wenn $\exists b \in R$ mit $b \neq 0$ und $a \cdot b = 0$. Dann ist für $a \in R$ ist äquivalent:

   (a) a ist links kürzbar (d. h. $\forall b, c \in R : a \cdot b = a \cdot c \to b = c$).

   (b) a ist kein Links-Nullteiler.

   (c) $L_a \colon R \to R$, $L_a(x) = a \cdot x$ ist injektiv.

   Außerdem ist (in einem Ring mit Eins) jede Linkseinheit (a heißt Linkseinheit, wenn es ein $b \in R$ mit $a \cdot b = 1_R$ gibt) links kürzbar.

3. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, N_l die Menge der Links-Nullteiler, N_r die Menge der Rechts-Nullteiler und $N = N_l \cup N_r$ die Menge der Nullteiler in R. Zeigen Sie

   (b) $R \setminus N_r$, $R \setminus N_l$ und $R \setminus N$ sind bzgl. $\cdot$ abgeschlossen.

   (c) $r \in R,\ a \in N_r \implies a \cdot r \in N_r$,

   (d) $r \in R,\ a \in N_l \implies r \cdot a \in N_l$.

4. Bestimmen Sie alle Einheiten des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] := \{a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ für

   (a) $D < 0$

   (b) $D = 3$.
   Hinweis. $2 + \sqrt{3}$.

5. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins. Ein $a \in R$ heißt *idempotent*, wenn $a^2 = a$. Zeigen Sie, dass

   (a) a idempotent $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a^n = a$.

   (b) a idempotent und $a \neq 1_R \Rightarrow a$ Nullteiler.

   (c) a, b idempotent $\Rightarrow ab$ idempotent.

   (d) a idempotent $\Rightarrow 1_R - a$ idempotent.

6. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $\mathrm{Nil}(R) = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ die Menge der nilpotenten Elemente von R. Wenn R kommutativ ist, dann ist $\mathrm{Nil}(R)$ ein Ideal von R.

7. Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, $E(R)$ die Menge der invertierbaren Elemente (Einheiten) von R, und a, $b \in R$. Dann gilt:

   (a) $a \in E(R),\ b \in \mathrm{Nil}(R) \implies a - b,\ a + b \in E(R)$

   (b) $1_R - b \in \mathrm{Nil}(R) \implies b \in E(R)$.

8. Sei I_λ, $\lambda \in \Lambda$ eine Familie von Idealen, für die

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda : I_\lambda \subseteq I_\mu \text{ oder } I_\mu \subseteq I_\lambda$$

   gilt, dann ist

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \trianglelefteq R.$$