27. Sei f ein „Eisenstein“-Polynom modulo p (d.h., f und p erfüllen die Voraussetzungen des Eisensteinschen Irreduzibilitätskriteriums), α eine Nullstelle von f und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie, dass p den Index der Gleichungsordnung $\mathbb{Z}[\alpha]$ im Ganzheitsring von K nicht teilt.

28. Sei I ein Ideal des Ganzheitsringes eines algebraischen Zahlkörpers. Zeigen Sie, dass die Absolutnorm $\mathbf{N}(I)$ ein Element von I ist.

29. Sei R ein Dedekindring und I ein Ideal von R, $I \neq R$. Zeigen Sie:

    (a) Es gibt ein $\alpha \in R$, sodass das Hauptideal αR eine Faktorisierung $\alpha R = IJ_1$ für ein zu I teilerfremdes Ideal J_2 hat.

    (b) Es gibt ein $\beta \in R$, sodass das Hauptideal βR eine Faktorisierung $\beta R = IJ_2$ für ein zu J_1 teilerfremdes Ideal J_2 besitzt.

    (c) Es gilt $I = \alpha R + \beta R$.

    Jedes Ideal von R ist daher Hauptideal oder wird von zwei Elementen erzeugt.

30. Man bestimme alle Einheitswurzeln, die in einem algebraischen Zahlkörper vom Grad 4 enthalten sein können.

31. Sei K ein algebraischer Zahlkörper, der mindestens eine reelle Einbettung besitzt (i.e., $s \neq 0$). Zeigen Sie, dass die Gruppe der Einheitswurzeln von K genau zwei Elemente besitzt.

32. Der algebraische Zahlkörper K besitze eine komplexe Einheitswurzel. Man zeige, dass die Norm einer beliebigen Zahl $\beta \in K \setminus \{0\}$ positiv ist.